

# Remerciements

Je tiens à remercier mes promoteurs Daniel Baye et Pierre Descouvemont qui m'ont aidée et conseillée tout au long de cette année scolaire. Je les remercie également pour leur disponibilité et la confiance qu'ils m'ont accordée en acceptant de me confier ce travail malgré mon séjour Erasmus.

Je remercie ma famille de m'avoir permis d'entreprendre ces études et de m'avoir inculqué l'ouverture d'esprit nécessaire à l'accomplissement d'une vie étudiante épanouie. Toutes les rencontres que j'ai pu faire au cours de ces cinq ans d'études ont été autant de sources d'enrichissement.

Je remercie Alex et Julie pour leurs précieux conseils en LaTeX, mes soeurs qui ont fait semblant de s'intéresser aux noyaux à halo malgré leur dégoût des mathématiques et tous les autres qui ont pris des nouvelles de l'avancement de ce travail.

Je remercie Steph, Caro, Anna, Sergio et tous les autres en compagnie de qui je n'ai pas vu le temps passer. Je pense aussi à Anja, Kamil, Ravi,... qui m'ont permis de confronter tant de cultures différentes et à Alfredo, Pasquale, Sergio, Cristian,... qui m'ont accueilli comme il se doit et qui m'ont fait passer six mois merveilleux. Je remercie également Gerald, Emma, Sylvain,... sans qui ces heures de TP auraient été interminables.

Je remercie enfin Nicolas qui a supporté mes inquiétudes au cours de ces 5 dernières années.

# Chapitre 1

## Introduction

La dénomination 'noyau à halo' s'applique à certains noyaux légers caractérisés par une structure très particulière qui fut découverte dans les années 80 pour des noyaux riches en neutrons. Cette structure est composée d'un coeur et d'un halo d'un ou plusieurs nucléons plus éloigné ce qui explique leur dénomination.

Deux phénomènes physiques permettent d'expliquer cette structure. La combinaison de la basse énergie de séparation des neutrons et de la courte portée de la force nucléaire permet aux neutrons de s'éloigner du coeur du noyau. Les neutrons sont donc présents avec une probabilité appréciable à des distances plus grandes que le rayon nucléaire normal.

Des noyaux à halo dont le halo est composé de protons sont également envisageables. La structure en halo est cependant moins prononcée étant donné que la barrière coulombienne joue dans ce cas un rôle important.

Les noyaux à halo sont donc des noyaux exotiques caractérisés par un grand rayon de matière par rapport aux autres noyaux de masse semblable. Parmi les différents noyaux à halo connus, nous pouvons entre autres citer le  $^{11}\text{Be}$  ou le  $^{17}\text{C}$  pour les halos de un neutron,  $^6\text{He}$ , le  $^{11}\text{Li}$  ou le  $^{14}\text{Be}$  pour les halos de deux neutrons et, finalement, le  $^8\text{B}$  ou le  $^{17}\text{F}$  pour les halos d'un proton. Un historique des recherches menées à leur sujet est développé dans [1].

Une autre caractéristique des noyaux à halo est le petit moment cinétique orbital des nucléons du halo. Les noyaux déjà observés ont des nucléons dans des états  $s$  et  $p$ .

La structure en halo mène à des caractéristiques expérimentales très particulières. La section efficace de réaction pour les dissociations électromagnétiques ou nucléaires est particulièrement importante. Mais le plus frappant reste le fait que les réactions de fragmentation du noyau à halo sont associées à une distribution très étroite des impulsions des fragments. Cette distribution étroite peut être vue comme une conséquence directe du principe d'incertitude d'Heisenberg associé à l'étendue physique de ces noyaux (une faible incertitude sur la position implique

une grande incertitude sur l'impulsion et réciproquement).

La section efficace de dissociation particulièrement grande s'explique par le fait que ce sont des noyaux faiblement liés. Les noyaux observés sont, comme nous l'avons déjà dit, des noyaux légers riches en neutrons ou en protons et donc situés loin de la vallée de stabilité. Les nucléons du halo sont faiblement liés vu leurs positions par rapport au coeur.

Ici, nous nous intéresserons aux noyaux à halo de deux neutrons et plus particulièrement à l' $^6\text{He}$  et au  $^{11}\text{Li}$ . Ces noyaux ont la particularité d'être des noyaux borroméens c'est à dire que ce sont des systèmes à trois corps faiblement liés et dont aucun des systèmes binaires n'est lié.

Nous devons finalement signaler que l'étude de ce type de structure fait largement appel aux modèles à plusieurs corps. Dans le cadre de l'étude de noyaux à halo de deux neutrons, nous ferons donc appel à un modèle à trois corps sans en discuter les fondements. Un calcul à trois corps a été développé dans les articles [2, 3] pour l' $^6\text{He}$  et [3, 4] pour le  $^{11}\text{Li}$ .

Dans ce travail de fin d'études, nous étudions plus particulièrement la dissociation électromagnétique de l' $^6\text{He}$  et du  $^{11}\text{Li}$ . Dans ce cadre, et afin d'être capable de calculer la section efficace de réaction, nous nous intéressons plus particulièrement à l'amplitude de transition pour la dissociation coulombienne de ces noyaux. Nous calculerons cette dernière sur base de la méthode des coordonnées hypersphériques.

Au chapitre 2, nous définissons tout d'abord les coordonnées de Jacobi sur lesquelles nous nous basons ensuite pour définir les coordonnées hypersphériques. Dans une autre section, nous résolvons l'équation de Schrödinger afin d'exprimer la fonction d'onde caractérisant l'état du noyau sur base des coordonnées hypersphériques.

Au chapitre 3, nous utilisons l'équation de Schrödinger développée dans les coordonnées hypersphériques au chapitre précédent pour déterminer le comportement à l'origine et asymptotique de la fonction d'onde. Nous explicitons ensuite les choix faits pour décrire l'état initial et final du noyau permettant de calculer l'amplitude de transition de la réaction.

Au chapitre 4, nous définissons l'opérateur multipolaire électrique. Nous développons ensuite une expression analytique des éléments de matrice qui interviendront dans l'expression de l'amplitude de transition. Après avoir défini les règles de sélection qui gouvernent ce calcul, nous les modélisons numériquement.

Au chapitre 5, nous commençons par appliquer l'état initial et l'état final développés au chapitre 3 à la définition générale de l'amplitude de transition. Nous explicitons ensuite les deux approximations faites pour la partie hyperradiale de la fonction d'onde de l'état initial et, finalement, nous développons une expression analytique de l'amplitude de transition sur base de la première approxima-

tion. Nous verrons, en effet, que la première fonction d'onde approchée, beaucoup moins réaliste que la seconde, est considérée uniquement dans le but de permettre ce calcul analytique.

Finalement, au chapitre 6, nous analysons les résultats obtenus pour l'amplitude de transition sur base des deux approximations décrites au chapitre précédent et les commentons.

## Chapitre 2

# Equation de Schrödinger en coordonnées hypersphériques

### 2.1 Définition des coordonnées hypersphériques

#### 2.1.1 Les coordonnées de Jacobi

Soit un système de  $N$  particules  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ), et soient  $\vec{r}_i$  leurs positions et  $A_i$  leurs nombres de masse. Les masses de ces particules sont donc  $m_i = A_i m_N$  où  $m_N$  est l'unité de masse. La valeur de  $m_N$  est donnée par la moyenne arithmétique des masses du proton et du neutron.

$$m_N = \frac{m_n + m_p}{2} = \frac{938.272 + 939.566}{2} = 939.919 \text{ MeV}/c^2 \quad (2.1.1)$$

On définit la coordonnée du centre de masse  $\vec{R}_{cm} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i$ , le nombre de masse totale  $A = \sum_{i=1}^N A_i$  et les coordonnées de Jacobi [5, 6] :

$$\vec{x}_i = \vec{r}_{i+1} - \frac{1}{A_i} \sum_{j=1}^i A_j \vec{r}_j \quad (2.1.2)$$

où  $A_i = \sum_{j=1}^i A_j$

Une interprétation physique de ces coordonnées est que la  $i^{\text{me}}$  coordonnée de Jacobi est la différence entre la  $i + 1^{\text{me}}$  coordonnée relative et le centre de masse des  $i$  premières particules.

Dans ce travail, nous aurons affaire à des systèmes de trois particules. Nous décidons donc de noter  $\vec{x}_1$  et  $\vec{x}_2$ , respectivement  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$ . Nous utiliserons donc l'ensemble des trois vecteurs suivants :

$$\vec{R}_{cm} = \sum_{i=1}^3 \frac{A_i}{\sqrt{A}} \vec{r}_i \quad (2.1.3)$$

$$\vec{x}_i = \sqrt{\frac{A_j A_k}{A_j + A_k}} (\vec{r}_j - \vec{r}_k) \quad (2.1.4)$$

$$\vec{y}_i = \sqrt{\frac{A_i (A_j + A_k)}{A}} \left( \vec{r}_i - \frac{A_j \vec{r}_j + A_k \vec{r}_k}{A_j + A_k} \right) \quad (2.1.5)$$

où le  $i$  fait référence à la coordonnée relative prise comme référence, dans notre cas la coordonnée relative du coeur du noyau, et où les coordonnées de Jacobi ont été normalisées.

### 2.1.2 Les coordonnées hypersphériques

L'avantage des coordonnées hypersphériques est de rassembler les coordonnées métriques du problème qui varient de 0 à  $\infty$  en une seule :  $\rho$ . On transforme en effet  $N$  coordonnées vectorielles (dans notre cas nous avons deux coordonnées vectorielles) en une coordonnée radiale et  $3N - 1$  coordonnées angulaires qui ont un domaine de définition borné (ici, une coordonnée radiale et 5 angulaires). Nous ne considérons pas ici la coordonnée du centre de masse vu que les coordonnées de Jacobi permettent de séparer le mouvement du centre de masse [5, 6].

L'hyperrayon est défini de la manière suivante [5, 6] :

$$\rho^2 = \vec{x}_i^2 + \vec{y}_i^2 \quad (2.1.6)$$

Physiquement, l'hyperrayon est proportionnel au rayon en moyenne quadratique du système de trois particules. Il est important de noter qu'il ne dépend pas de la coordonnée relative  $i$  prise comme référence.

Les cinq hyperangles sont les quatre angles directeurs de  $\vec{x}_i$  et  $\vec{y}_i$ , notés respectivement  $(\theta_{x_i}, \varphi_{x_i})$  et  $(\theta_{y_i}, \varphi_{y_i})$  ou  $\hat{x}_i$  et  $\hat{y}_i$  et l'hyperangle  $\alpha_i$  défini comme suit [5, 6] :

$$x_i = \rho \cos \alpha_i \quad (2.1.7)$$

$$y_i = \rho \sin \alpha_i \quad (2.1.8)$$

où  $0 \leq \alpha_i \leq \frac{\pi}{2}$ . L'ensemble des cinq hyperangles peut être noté  $\Omega$ .

Il est important de noter que les coordonnées hypersphériques peuvent différer selon les coordonnées de Jacobi prises comme référence et selon la définition donnée aux variables angulaires. Dans l'article [7], par exemple, la définition de  $\alpha_i$  est :

$$x_i = \rho \sin \alpha_i \quad (2.1.9)$$

$$y_i = \rho \cos \alpha_i \quad (2.1.10)$$

Nous verrons plus loin ce que cela change dans les développements.

L'élément de volume est défini comme :

$$\vec{d}x\vec{d}y = \rho^5 d\rho \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \sin \vartheta_x \sin \vartheta_y d\alpha d\theta_x d\varphi_x d\theta_y d\varphi_y = \rho^5 d\rho d\Omega \quad (2.1.11)$$

où nous avons omis de préciser le  $i$  pour ne pas alourdir l'expression.

On définit ensuite l'opérateur angulaire  $K^2(\Omega_i)$  qui est défini dans l'expression de l'énergie cinétique [5, 6].

$$K^2(\Omega) = -\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - 4 \cot(2\alpha) \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{l^2(\hat{x})}{\cos^2 \alpha} + \frac{l^2(\hat{y})}{\sin^2 \alpha} \quad (2.1.12)$$

Les harmoniques hypersphériques sont définies comme étant les fonctions propres de cet opérateur associées aux valeurs propres  $K(K+4)$ , ainsi que celles de  $l^2(\hat{x})$ ,  $l^2(\hat{y})$ ,  $l_z(\hat{x})$ ,  $l_z(\hat{y})$ .

$$K^2(\Omega) \Gamma_K^{l_x l_y m_x m_y}(\Omega) = K(K+4) \Gamma_K^{l_x l_y m_x m_y}(\Omega) \quad (2.1.13)$$

La forme explicite des harmoniques hypersphériques [5] est :

$$\Gamma_K^{l_x l_y m_x m_y}(\Omega) = N_K^{l_x l_y} (\cos \alpha)^{l_x} (\sin \alpha)^{l_y} P_n^{l_y+1/2, l_x+1/2}(\cos 2\alpha) Y_{l_x}^{m_x}(\hat{x}) Y_{l_y}^{m_y}(\hat{y}) \quad (2.1.14)$$

$$N_K^{l_x l_y} = \left[ \frac{2n!(K+2)(n+l_x+l_y+1)!}{\Gamma(n+l_x+\frac{3}{2})\Gamma(n+l_y+\frac{3}{2})} \right]^{1/2} \quad (2.1.15)$$

$$n = (K - l_x - l_y) / 2 \quad (2.1.16)$$

pour  $K$  entier positif ou nul,  $l_x$  et  $l_y$  entiers tels que  $n$  soit un entier positif ou nul,  $m_x$  compris entre  $-l_x$  et  $l_x$  et  $m_y$  compris entre  $-l_y$  et  $l_y$ . Dans cette équation,  $N_K^{l_x l_y}$  est un facteur de normalisation,  $Y_l^m$  l'harmonique sphérique de moment cinétique  $l$  et de projection  $m$ ,  $\Gamma$  la fonction Gamma et  $P_n^{\alpha, \beta}$  le polynôme de Jacobi de degré  $n$  et de paramètre  $\alpha$  et  $\beta$ .

Par définition, nous savons que :

$$l^2(\hat{x}) Y_l^m(\hat{x}) = l(l+1) Y_l^m(\hat{x}) \quad (2.1.17)$$

La démonstration de l'expression des harmoniques hypersphériques est faite dans [5].

$K^2(\Omega_i)$  est un opérateur hermitique et ses fonctions propres forment une base orthonormée. Nous n'utiliserons toutefois pas cette base pour développer notre fonction d'onde mais la base formée des harmoniques hypersphériques composées, dans lesquelles nous avons composé les deux moments cinétiques  $l_x$  et  $l_y$  pour donner le moment cinétique orbital total du système.

$$\Gamma_{KLM_L}^{l_x l_y}(\Omega) = \sum_{m_x, m_y} (l_x l_y m_x m_y | LM_L) \Gamma_K^{l_x l_y m_x m_y}(\Omega) \quad (2.1.18)$$

c'est à dire (voir [7])

$$\Gamma_{KLM_L}^{l_x l_y}(\Omega) = \Phi_K^{l_x l_y}(\alpha) Y_{LM_L}^{l_x l_y}(\hat{x}, \hat{y}) \quad (2.1.19)$$

où

$$\Phi_K^{l_x l_y}(\alpha) = N_K^{l_x l_y} (\cos \alpha)^{l_x} (\sin \alpha)^{l_y} P_n^{l_y+1/2, l_x+1/2}(\cos 2\alpha) \quad (2.1.20)$$

$$Y_{LM_L}^{l_x l_y}(\hat{x}, \hat{y}) = [Y_{l_x}(\hat{x}) \otimes Y_{l_y}(\hat{y})]_{LM_L} \quad (2.1.21)$$

Ces harmoniques hypersphériques forment une base orthonormée (comme démontré dans [5]) de fonctions propres de  $K^2, L^2, l^2(\hat{x}), l^2(\hat{y})$  et  $L_z$ .

Nous devons ici souligner une première différence avec les notations adoptées dans l'article [7] compte tenu de la définition différente de l'angle  $\alpha$ . En effet, si  $\alpha$  est défini comme

$$x_i = \rho \sin \alpha_i \quad (2.1.22)$$

$$y_i = \rho \cos \alpha_i \quad (2.1.23)$$

alors

$$\Phi_K^{l_x l_y}(\alpha) = N_K^{l_x l_y} (\sin \alpha)^{l_x} (\cos \alpha)^{l_y} P_n^{l_x+1/2, l_y+1/2}(\cos 2\alpha) \quad (2.1.24)$$

Les rôles de  $l_x$  et  $l_y$  sont donc inversés.

## 2.2 Equation de Schrödinger

Comme nous l'avons vu, les noyaux que nous voulons modéliser sont des noyaux à halo de deux neutrons. Nous considérerons donc un système à trois corps.

L'hamiltonien d'un système isolé à trois particules interagissant deux à deux s'écrit en toute généralité :

$$H = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + \frac{p_3^2}{2m_3} + V^3(\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|) + V^1(\|\vec{r}_2 - \vec{r}_3\|) + V^2(\|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\|) \quad (2.2.1)$$

où  $m_1, m_2$  et  $m_3$  sont les masses des trois particules exprimées en unité  $m_N$ .

Pour des questions de lisibilité, nous ne tiendrons compte que de la composante centrale du potentiel (approximation des interactions centrales faite dans [5]).

Si nous utilisons la définition des coordonnées de Jacobi :

$$V^i(\|\vec{r}_j - \vec{r}_k\|) = V^i\left(\sqrt{\frac{A_j + A_k}{A_j A_k}} x_i\right) = \tilde{V}^i(x_i) \quad (2.2.2)$$

Le symbole tilde sera omis dans la suite.

En tenant compte de l'expression de l'énergie cinétique développée dans [5, 6] et de la définition de l'hyperangle  $\alpha_i$ , l'hamiltonien s'écrit :

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m_N} \left[ \frac{1}{\rho^5} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho^5 \frac{\partial}{\partial \rho} \right) - \frac{K^2(\Omega_i)}{\rho^2} \right] + V^i(\rho \cos \alpha_i) + V^j(\rho \cos \alpha_j) + V^k(\rho \cos \alpha_k) \quad (2.2.3)$$

L'équation de Schrödinger s'écrit :

$$H\Psi_{JM} = E_J\Psi_{JM} \quad (2.2.4)$$

où  $\Psi_{JM}$  est la fonction d'onde inconnue que nous développons sur base des harmoniques hypersphériques :

$$\Psi_{JM} = \rho^{-5/2} \sum_{K\gamma} \chi_{K\gamma}^J(\rho) \left[ \Gamma_{KLM_L}^{l_x l_y}(\Omega) \otimes \theta_S \right]_{JM} \quad (2.2.5)$$

$L$  est le moment cinétique orbital total du système et  $M_L$  la projection de ce moment cinétique.  $\theta_S$  est la fonction de spin total associée aux trois particules.  $\gamma$  représente l'ensemble des quatre nombres quantiques  $LSl_x l_y$ .

Nous remplaçons  $\Psi_{JM}$  par son expression dans l'équation de Schrödinger 2.2.4. En multipliant cette équation par une fonction quelconque de notre base et en utilisant la relation d'orthogonalité des harmoniques hypersphériques, nous obtenons le système d'équations suivant :

$$\left[ \frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{L_K(L_K + 1)}{\rho^2} + \frac{2m_N}{\hbar^2} (E - W_{K\gamma, K\gamma}^J(\rho)) \right] \chi_{K\gamma}^J = \frac{2m_N}{\hbar^2} \sum_{K'\gamma'} W_{K'\gamma', K\gamma}^J(\rho) \chi_{K'\gamma'}^J(\rho) \quad (2.2.6)$$

Pour obtenir cette expression, nous avons posé :

$$L_K = K + 3/2 \quad (2.2.7)$$

$$V = V^i(\rho \cos \alpha_i) + V^j(\rho \cos \alpha_j) + V^k(\rho \cos \alpha_k) \quad (2.2.8)$$

et

$$W_{K'\gamma', K\gamma}^J(\rho) = \int_{\Omega} \Gamma_{KLM_L}^{l_x l_y*}(\Omega) V \Gamma_{K'L'M'_L}^{l'_x l'_y}(\Omega) d\Omega \quad (2.2.9)$$

Dans 2.2.6, la somme sur  $K'l'_x l'_y$  porte sur toutes les valeurs sauf sur  $Kl_x l_y$ . Nous avons en effet fait passer ce terme dans l'autre membre.

## Chapitre 3

# Description du noyau

### 3.1 Comportement à l'origine de la fonction d'onde

Dans cette section, nous allons déterminer le comportement à l'origine de la partie hyperradiale de la fonction d'onde (2.2.5). Nous savons que ces fonctions sont solutions de l'équation de Schrödinger (2.2.6) développée au chapitre précédent. Nous faisons, en plus, les hypothèses suivantes [8] :

$$\begin{aligned}\chi(0) &= 0 \\ \rho^2 V(\rho) &\xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0\end{aligned}$$

La première hypothèse tient compte du fait que la fonction d'onde inconnue est de carré sommable et la dernière, que le potentiel est borné ou ne tend pas vers l'infini aussi vite que  $\frac{1}{\rho^2}$  quand  $\rho \rightarrow 0$ .

La singularité à l'origine est due au terme  $\frac{L_K(L_K+1)}{\rho^2}$  où  $L_K = K + \frac{3}{2}$ . L'origine est donc un point singulier régulier et nous pouvons rechercher une solution sous forme d'une série de Frobenius dont le terme de degré le plus bas est  $\rho^s$ . La valeur de  $s$  est fixée en remplaçant  $\chi(\rho)$  dans l'équation (2.2.6) et en annulant le coefficient du terme de degré le plus bas de la série obtenue. Le coefficient du terme en  $\rho^{s-2}$  est :

$$-s(s-1) + L_K(L_K+1) = 0 \quad (3.1.1)$$

Les deux solutions obtenues sont  $s = -L_K$  et  $s = L_K + 1$ . La première ne respecte pas l'hypothèse  $\chi(0) = 0$ . La seconde est donc la seule solution valable.

Nous en déduisons que la fonction hyperradiale se comporte en  $\rho^{K+\frac{5}{2}}$  à l'origine. Etant donné que la solution de l'équation de Schrödinger (2.2.5) a un coefficient en  $\rho^{-\frac{5}{2}}$ , nous connaissons le comportement de la fonction d'onde à l'origine.

$$\Psi_{JM} \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} \rho^K \quad (3.1.2)$$

## 3.2 Comportement asymptotique de la fonction d'onde

Nous allons à présent déterminer le comportement asymptotique de la fonction d'onde (2.2.5) tant pour l'état lié (ou état d'énergie négative) que pour l'état libre (ou état d'énergie positive). Dans les deux cas, nous imposons que

$$\chi(\rho) \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} 0$$

afin que la solution soit de carré sommable.

Rappelons que l'état est faiblement lié vu que les particules du halo se déplacent relativement loin du coeur du noyau. Nous allons donc introduire une approximation valable pour tout le domaine d'énergie. Nous considérons que :

$$W_{K'\gamma, K\gamma}^J(\rho) \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} 0 \quad (3.2.1)$$

En remplaçant dans l'équation (2.2.6), nous obtenons l'équation de Schrödinger asymptotique

$$\left[ \frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{L_K(L_K + 1)}{\rho^2} \pm \kappa^2 \right] \chi_{K\gamma}^J = 0 \quad (3.2.2)$$

dans laquelle  $\kappa$  est défini de la manière suivante

$$\kappa = \sqrt{\frac{2m_N}{\hbar^2} |E|} \quad (3.2.3)$$

Cette équation est équivalente à une équation de Bessel dans laquelle le coefficient du terme du premier degré est nul et que nous allons résoudre séparément pour les deux domaines d'énergie considérés.

### 3.2.1 Etat lié

Dans le cas où  $E < 0$ , l'équation de Bessel a la forme suivante :

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dw}{dz} - \left( 1 + \frac{v^2}{z^2} \right) w = 0 \quad (3.2.4)$$

et sa solution est donnée par une combinaison linéaire de fonctions de Bessel modifiées  $I_\nu(z)$  et  $K_\nu(z)$ .

$$w = (C_1 I_\nu(z) + C_2 K_\nu(z)) \quad (3.2.5)$$

Leurs propriétés sont décrites dans [9].

Afin de déterminer le comportement asymptotique, nous posons  $w = z^\alpha Q$  et déterminons  $\nu$  et  $\alpha$  tels que l'expression (3.2.4) soit équivalente à l'équation (3.2.2). Les valeurs obtenues pour  $\nu$  et  $\alpha$  sont respectivement  $K + 2$  et  $-1/2$ .

Nous pouvons à présent remplacer  $\alpha$  et  $\nu$  dans l'équation (3.2.5). En tenant compte du fait que  $I_\nu(\kappa\rho) \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} e^{\kappa\rho}$  et donc en annulant le coefficient de ce terme,  $C_2$ , nous obtenons la solution de carré sommable de l'équation (3.2.4) :

$$Q = C_4 (\kappa\rho)^{\frac{1}{2}} K_{K+2}(\kappa\rho) \quad (3.2.6)$$

dans laquelle nous avons posé  $z = \kappa\rho$ .  $\kappa$  est défini par l'équation 3.2.3.

Sachant que  $K_\nu(\kappa\rho) \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} e^{-\kappa\rho}$ , nous constatons que les fonctions hyperradiales des états liés du système décroissent comme une exponentielle et la densité de probabilité de présence est donc très faible à grande distance.

Ce résultat peut être vérifié par un autre développement [8]. Si nous négligeons le terme en  $\rho^{-2}$  de l'équation (3.2.2) lorsque  $\rho \rightarrow \infty$ , nous obtenons :

$$-\frac{d^2}{d\rho^2}\chi_\infty = \frac{2m_N}{\hbar^2}E\chi_\infty \quad (3.2.7)$$

Pour  $E < 0$ , cette équation a comme solution générale :

$$\chi_\infty = Ae^{-\kappa\rho} + Be^{+\kappa\rho} \quad (3.2.8)$$

Le deuxième terme de cette expression n'étant pas de carré sommable, les solutions physiques correspondent à  $B=0$ . Nous obtenons donc bien une exponentielle négative comme précédemment.

### 3.2.2 Etat libre

Dans ce cas, l'équation de Bessel s'écrit :

$$\frac{d^2w}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{dw}{dz} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right)w = 0 \quad (3.2.9)$$

et a pour solution une combinaison linéaire de fonctions de Bessel du premier et second types [9] :

$$w = (C_3J_\nu(z) + C_4Y_\nu(z)) \quad (3.2.10)$$

En suivant un raisonnement similaire à celui du paragraphe précédent, nous obtenons les mêmes valeurs pour  $\nu$  et  $\alpha$ , c'est à dire  $K + 2$  et  $-1/2$ . Par conséquent, la solution de l'équation (3.2.9) est

$$Q = (\kappa\rho)^{\frac{1}{2}} (C_3J_{K+2}(\kappa\rho) + C_4Y_{K+2}(\kappa\rho)) \quad (3.2.11)$$

Malgré le fait que  $Y_\nu(\kappa\rho)$  diverge à l'origine, nous n'avons pas annulé le coefficient de ce terme puisque nous recherchons le comportement asymptotique de la fonction d'onde. Cependant, les fonctions de Bessel du second type n'interviendront pas dans l'expression de l'état final. Nous expliquerons pourquoi dans la suite de ce chapitre.

### 3.3 Fonction d'onde du système

Nous introduisons ici le fait que nous allons étudier des noyaux à halo de deux neutrons. Ces noyaux ont la caractéristique remarquable d'être borroméens. En effet, ces systèmes à trois corps sont faiblement liés mais aucun de leurs sous-systèmes binaires n'est lié. Ils ne possèdent qu'un seul état lié.

Comme nous l'avons vu au chapitre 2, la fonction d'onde de ce système, solution de l'équation de Schrödinger (2.2.4), peut être développée sur base des harmoniques hypersphériques (2.1.19).

$$\Psi_{JM} = \rho^{-5/2} \sum_{K\gamma} \chi_{K\gamma}^J(\rho) \left[ \Gamma_{KLM_L}^{l_x l_y}(\Omega) \otimes \theta_S \right]_{JM} \quad (3.3.1)$$

Seules les fonctions hyperradiales  $\chi_{K\gamma}^J(\rho)$  diffèrent de l'état lié à l'état libre du système.

Nous introduisons quelques règles de sélections qui s'appliquent à un système de trois corps constitué de deux neutrons et d'un coeur. Le moment cinétique total résulte de la composition du moment cinétique orbital total  $L$  et du spin total  $S$ .

$$|L - S| \leq J \leq L + S \quad (3.3.2)$$

Le spin total [5] résulte de la composition du spin des deux neutrons et du moment cinétique total du coeur du noyau.

$$S = L_c \otimes (S_{n_1} \otimes S_{n_2}) \quad (3.3.3)$$

Et enfin, la parité résulte de la composition de la parité du coeur du noyau et de celles des deux mouvements relatifs des particules [5] :

$$\pi = \pi_c \otimes (-1)^{l_x + l_y} \quad (3.3.4)$$

Afin de pouvoir calculer la section efficace de la dissociation coulombienne, nous devons déterminer un état initial et un état final pour le système étudié. Dans la suite, nous considérerons que l'état initial est le seul état lié du noyau et que l'état final est un état libre. Nous allons à présent particulariser ces états au cas que nous étudions.

### 3.3.1 Description de l'état lié

Nous savons que l'état du système est décrit par l'équation (3.3.1). Dans ce travail, nous cherchons à comparer différentes approximations de la partie hyper-radiale  $\chi_{K\gamma}^J(\rho)$  de la fonction d'onde de l'état initial, l'état final étant décrit de la même façon dans les différents cas. Nous verrons plus loin en quoi consistent ces approximations.

Comme nous l'avons dit, l'état initial est le seul état lié du noyau, son niveau fondamental. Les niveaux fondamentaux de  ${}^6\text{He}$  et du  ${}^{11}\text{Li}$  sont, respectivement, des états  $0^+$  et  $\frac{3}{2}^-$ . Dans la suite, nous négligeons le spin du coeur du noyau. Nous considérerons donc que l'état initial est un état  $J^P = 0^+$ .

Etant donné que le moment cinétique total résulte de la composition du moment cinétique orbital total  $L$  et du spin total  $S$  (3.3.2), pour que la valeur nulle de  $J$  soit possible  $L$  doit être égal à  $S$ .

$$L = S \quad (3.3.5)$$

Le fait de considérer le niveau fondamental du coeur permet d'expliquer que le spin total est donné par la composition du spin des deux neutrons (3.3.3). Le spin total du noyau prend donc les valeurs 0 ou 1.

La parité totale paire, la parité du coeur dans son état fondamental ainsi que le fait que le moment cinétique orbital total  $L$  résulte de la composition de  $l_x$  et  $l_y$  impose l'égalité des deux moments cinétiques orbitaux (3.3.4). Le principe d'antisymétrisation [5, 10] implique que  $l_x$  et  $l_y$  soient pairs dans le cas où  $S$  vaut 0 et impairs dans le cas où  $S$  vaut 1.

Les relations développées dans ce paragraphe permettent de caractériser les différentes fonctions hyperradiales par le triplet  $(Kl_xl_y)$ .

### 3.3.2 Choix de l'état final

Afin d'obtenir l'amplitude de transition ainsi que la section efficace différentielle pour la dissociation électromagnétique, nous utilisons un état final pour lequel les interactions entre les trois particules sont négligées. Nous supposons donc que les particules sont suffisamment éloignées l'une de l'autre pour ne pas interagir.

Dans ce cas, les fonctions d'onde caractérisant l'ensemble des trois corps sont des ondes planes. Ces ondes planes peuvent être développées sous forme d'une

combinaison de produits d'harmoniques hypersphériques exprimées en fonction des coordonnées des particules ou des impulsions qui leur sont associées et de fonctions de Bessel [11].

$$\begin{aligned} \exp [i(\vec{q}_l \cdot \vec{x}_l + \vec{p}_l \cdot \vec{y}_l)] &= \frac{(2\pi)^3}{(\kappa\rho)^2} \\ &\times \sum_{KLLxly} i^K \left( \Gamma_{KL}^{lxly}(\Omega^\rho) \right)^* \left( \Gamma_{KL}^{lxly}(\Omega^\kappa) \right) J_{K+2}(\kappa\rho) \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

Dans cette expression,  $\vec{x}_l$  et  $\vec{y}_l$  sont les coordonnées de Jacobi définies par rapport à la particule  $l$  et  $\vec{q}_l$  et  $\vec{p}_l$  les impulsions associées.

$$\vec{q}_l = \sqrt{\frac{A_i A_j}{(A_i + A_j)}} \left( \frac{\vec{k}_i}{A_i} - \frac{\vec{k}_j}{A_j} \right) \quad (3.3.7)$$

$$\vec{p}_l = \sqrt{\frac{(A_i + A_j) A_l}{(A_i + A_j + A_l)}} \left( \frac{\vec{k}_i + \vec{k}_j}{A_i + A_j} - \frac{\vec{k}_l}{A_l} \right) \quad (3.3.8)$$

où  $\vec{k}_i$ ,  $\vec{k}_j$  et  $\vec{k}_l$  sont les impulsions des particules individuelles [11].  $\Omega^\rho$  et  $\Omega^\kappa$  sont les cinq hyperangles respectivement associés aux coordonnées et aux impulsions des particules.

Etant donné que nous sommes seulement intéressés par la dépendance énergétique de la section efficace de réaction, nous n'avons pas besoin de connaître les directions des impulsions des particules. Au lieu d'utiliser des ondes planes, nous utilisons donc un ensemble d'états finaux sans interaction qui inclut des harmoniques hypersphériques dépendant seulement des coordonnées des particules.

La partie hyperradiale des fonctions d'ondes de l'état final s'exprime donc de la manière suivante :

$$\chi_{K\gamma}^J(\rho) = \frac{J_{K+2}(\kappa\rho)}{(\kappa\rho)^2} \quad (3.3.9)$$

Nous constatons que cette équation est en accord avec le comportement asymptotique de la fonction d'onde pour l'état libre étudié plus haut.

Comme les ondes planes, les fonctions d'onde associées à 3.3.9 sont solutions de l'équation de Schrödinger asymptotique à six dimensions.

## Chapitre 4

# Calcul des éléments de matrice

### 4.1 Opérateur multipolaire électrique

Nous allons tout d'abord définir l'opérateur multipolaire électrique qui intervient dans les éléments de matrice que nous cherchons à calculer. Il est défini dans ce cas comme [7, 12, 13]

$$\vec{M}(E_1) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sum_{i=1}^N eZ_i (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) \quad (4.1.1)$$

où les  $\vec{r}_i$  sont les vecteurs position des trois corps qui composent les noyaux et  $\vec{R}_{cm}$  est la position du centre de masse du système. Les noyaux borroméens que nous étudions sont constitués d'un halo de deux neutrons. L'expression ci-dessus se réduit donc au terme caractérisant le coeur du noyau.

$$\vec{M}(E_1) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \left\{ 0 + 0 + eZ_c (\vec{r}_c - \vec{R}_{cm}) \right\} \quad (4.1.2)$$

Si nous utilisons la définition de la coordonnée du centre de masse et celle des coordonnées de Jacobi, nous obtenons après simplifications :

$$M(E_1, \mu) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} eZ_c \sqrt{\frac{2m_N}{Mm_c}} \vec{y}_c \quad (4.1.3)$$

Tenons compte à présent de la définition des coordonnées hypersphériques dans lesquelles  $\vec{y}_c$  est décrit par trois hyperangles et par l'hypperrayon. L'expression devient [14] :

$$M_\mu^{(1)} = eZ_c \sqrt{\frac{Z_c}{A(A-Z_c)}} \rho \sin \alpha_c Y_{1\mu}(\hat{y}) \quad (4.1.4)$$

où  $Y_{1\mu}(\hat{y})$  est un opérateur tensoriel irréductible (OTI) de rang 1. Rappelons qu'un opérateur tensoriel irréductible de rang  $k$  est défini comme un ensemble de  $2k + 1$  composantes  $T_q^{(k)}$  ( $q = -k, -k + 1, \dots, k - 1, k$ ) qui se transforment par rotation selon

$$R(\Omega) T_q^{(k)} R^+(\Omega) = \sum_{q'} D_{q'q}^k(\Omega) T_{q'}^{(k)} \quad (4.1.5)$$

où  $D_{q'q}^k(\Omega)$  sont les éléments de matrice de rotation ou de Wigner.

## 4.2 Forme analytique des éléments de matrice

Les éléments de matrice que nous désirons calculer sont

$$\begin{aligned} & \langle \Psi_{J'M'} | M_\mu^{(1)} | \Psi_{JM} \rangle \equiv \\ & \langle \rho^{-5/2} \chi_{K'\gamma'}^{J'}(\rho) \left[ \Gamma_{K'L'M_L}^{l_x l_y}(\Omega) \otimes \theta_{S'} \right]_{J'M'} | M_\mu^{(1)} | \rho^{-5/2} \chi_{K\gamma}^J(\rho) \left[ \Gamma_{KLM_L}^{l_x l_y}(\Omega) \otimes \theta_S \right]_{JM} \rangle \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

$\Psi_{JM}$  et  $\Psi_{J'M'}$  sont respectivement l'état initial et final du noyau.  $\chi_{K'\gamma'}^{J'}(\rho)$  et  $\chi_{K\gamma}^J(\rho)$  devront être remplacés par les fonctions correspondant aux approximations auxquelles nous avons fait allusion au chapitre précédent (paragraphe 3.3.1 et 3.3.2). Les autres définitions sont développées dans le chapitre 2.

En utilisant le théorème de Wigner-Eckart et ses corollaires (le calcul complet se trouve dans l'annexe (A)) et les deux relations suivantes

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & J & 0 \end{matrix} \right\} = \delta_{j_1 J} \delta_{j_2 j_3} \frac{(-1)^{j_1 + j_2 + j_3}}{\sqrt{(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)}} \quad (4.2.2)$$

$$\langle Y_{l_3} || Y_{l_1} || Y_{l_2} \rangle = (l_1 0 l_2 0 | l_3 0) \sqrt{\frac{(2l_1 + 1)(2l_2 + 1)}{4\pi(2l_3 + 1)}} \quad (4.2.3)$$

nous obtenons :

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{J'M'} | M_\mu^{(1)} | \Psi_{JM} \rangle &= \delta_{SS'} \delta_{l_x l_x'} \delta_{LS} (-)^{L+l_x+l_y+1} (2L'+1)^{1/2} \\ &\times \left\{ \begin{matrix} L' & l_y' & l_x \\ l_y & L & 1 \end{matrix} \right\} (10 l_y 0 | l_y' 0) \sqrt{\frac{2l_y+1}{4\pi}} A_\rho B_\alpha \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

où

$$A_\rho = \langle \chi_{\lambda K'\gamma'}^{J'}(\rho) \rho^{-5/2} | \rho | \chi_{\lambda K\gamma}^J(\rho) \rho^{-5/2} \rangle \quad (4.2.5)$$

$$B_\alpha = \langle \Phi_{K'}^{l_x l_y'}(\alpha) | \sin \alpha | \Phi_K^{l_x l_y}(\alpha) \rangle \quad (4.2.6)$$

Nous avons pu vérifier l'exactitude de cette expression en comparant les valeurs obtenues analytiquement pour la partie hyperangulaire des éléments de matrice avec les valeurs données dans l'article [7].

Dans la suite de ce travail, nous allons d'abord développer analytiquement l'élément de matrice hyperangulaire  $B_\alpha$  (4.2.6). Ensuite, nous développerons numériquement l'élément de matrice hyperradial  $A_p$  (4.2.5) qui n'est autre qu'une intégrale hyperradiale.

### 4.3 Règles de sélection appliquées aux éléments de matrice

Le développement analytique des éléments de matrice met en évidence un certain nombre de règles de sélection qui nous permettent de déterminer quels éléments doivent être calculés (équation A.0.14). Nous les utiliserons dans le calcul numérique de l'amplitude de transition.

Nous avons déjà mentionné le fait que l'état initial est un état  $J^r = 0^+$ . Le coefficient de Clebsch-Gordan  $(J1M\mu|J'M')$  [8] nous impose que

$$M + \mu = M' \quad (4.3.1)$$

$$|J - 1| \leq J' \leq J + 1 \quad (4.3.2)$$

avec  $J + J' + 1$  entier.

Nous en déduisons que  $J' = 1$  et que  $M' = \mu$ .

$\delta_{S'S}$  et  $\delta_{l'_x l_x}$  nous imposent à leur tour deux autres règles à respecter :

$$S = S' \quad (4.3.3)$$

$$l'_x = l_x \quad (4.3.4)$$

Examinons ensuite le coefficient 6-j suivant :

$$\begin{Bmatrix} J' & L' & S \\ L & J & 1 \end{Bmatrix} \quad (4.3.5)$$

Il nous impose comme conditions supplémentaires :

$$|L - 1| \leq L' \leq L + 1 \quad (4.3.6)$$

$$|J - S| \leq L \leq J + S \Rightarrow L = S \quad (4.3.7)$$

avec  $L + L' + 1$  et  $J + L + S$  entiers.

Enfin, le coefficient  $(10l_y 0 | l'_y 0)$  nous donne  $|l_y - 1| \leq l'_y \leq l_y + 1$  avec  $l_y + l'_y + 1$  pair.

Autrement dit

$$|l'_y - l_y| = 1 \quad (4.3.8)$$

En utilisant cette dernière relation et le fait que  $n = (K - l_x - l_y) / 2$  doit être entier positif ou nul, nous obtenons que

$$|K' - K| = 1 \quad (4.3.9)$$

Rappelons enfin que la parité du noyau impose que  $l_x = l_y$  et que le spin ne peut valoir que 0 ou 1 (voir chapitre 3).

Notons que nous n'avons pas commenté le coefficient 6-j

$$\begin{Bmatrix} L' & l'_y & l_x \\ l_y & L & 1 \end{Bmatrix} \quad (4.3.10)$$

puisque'il ne nous fournit aucune nouvelle information.

## 4.4 Développement analytique de l'élément de matrice hyperangulaire $B_\alpha$

Nous désirons pouvoir modéliser la partie hyperangulaire de l'élément de matrice développé à la section 4.2. Pour ce faire, nous allons simplifier analytiquement l'expression de l'élément de matrice hyperangulaire  $B_\alpha$  (4.2.6) afin d'éviter de devoir intégrer numériquement.

$$\begin{aligned} B_\alpha &= N_{K'}^{l'_x l'_y} N_K^{l_x l_y} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \alpha)^{l_y + l'_y + 3} (\cos \alpha)^{l_x + l'_x + 2} \\ &\quad \times P_n^{l'_y + \frac{1}{2}, l'_x + \frac{1}{2}}(\cos 2\alpha) P_n^{l_y + \frac{1}{2}, l_x + \frac{1}{2}}(\cos 2\alpha) d\alpha \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

La normalisation des harmoniques hypersphériques est faite dans l'annexe B. Elle permet de démontrer l'expression des coefficients de normalisation

$$N_K^{l_x l_y} = \left[ \frac{2n! (K + 2) (n + l_x + l_y + 1)!}{\Gamma(n + l_x + \frac{3}{2}) \Gamma(n + l_y + \frac{3}{2})} \right]^{1/2} \quad (4.4.2)$$

qui nous sera utile dans le développement qui suit ainsi que d'expliciter la démarche de calcul utilisée dans le développement de  $B_\alpha$  (4.4.1).

En effet, en posant  $l'_y = l_y + 1$  4.3.8,  $\gamma = l_y + 1/2$ ,  $\beta = l_x + 1/2$  et  $x = \cos 2\alpha$  comme dans l'expression B.0.5 dans l'équation (4.4.1), nous savons que  $B_\alpha$  peut s'exprimer de la manière suivante

$$B_\alpha = N_{K'}^{l'_x l'_y} N_K^{l_x l_y} \int_{-1}^1 (1-x)^{\gamma+1} (1+x)^\beta 2^{-(\gamma+\beta+3)} P_{n'}^{\gamma+1, \beta}(x) P_n^{\gamma, \beta}(x) dx \quad (4.4.3)$$

Utilisons la propriété des polynômes de Jacobi suivante [9]

$$(1-x) P_{n'}^{\gamma+1, \beta}(x) = \frac{(n' + \gamma + 1) P_{n'}^{\gamma, \beta}(x) - (n' + 1) P_{n'+1}^{\gamma, \beta}(x)}{n' + \frac{\gamma}{2} + \frac{\beta}{2} + 1} \quad (4.4.4)$$

et les relations d'orthogonalité de ces mêmes polynômes.

$$\int_{-1}^1 (1-x)^\gamma (1+x)^\beta 2^{-(\gamma+\beta+2)} P_{n'}^{\gamma, \beta}(x) P_n^{\gamma, \beta}(x) dx = \delta_{n'n} h_n(\gamma, \beta) \quad (4.4.5)$$

où

$$h_n(\gamma, \beta) = \frac{2^{\gamma+\beta+1}}{2n + \gamma + \beta + 1} \frac{\Gamma(n + \gamma + 1) \Gamma(n + \beta + 1)}{n! \Gamma(n + \gamma + \beta + 1)} \quad (4.4.6)$$

avec  $\gamma, \beta > -1$ .

L'équation (4.4.3) devient

$$B_\alpha = N_{K'}^{l'_x l'_y} N_K^{l_x l_y} 2^{-(\gamma+\beta+3)} h_n(\gamma, \beta) \times \left[ \delta_{nn'} \frac{n' + \gamma + 1}{n' + \frac{\gamma}{2} + \frac{\beta}{2} + 1} - \delta_{n(n'+1)} \frac{n' + 1}{n' + \frac{\gamma}{2} + \frac{\beta}{2} + 1} \right] \quad (4.4.7)$$

En remplaçant les variables  $\gamma$  et  $\beta$  par leur valeur et en simplifiant, nous obtenons finalement

$$B_\alpha = N_{K'}^{l'_x l'_y} N_K^{l_x l_y} \frac{1}{4} \frac{1}{\left(n' + \frac{l_y}{2} + \frac{l_x}{2} + \frac{3}{2}\right) (2n + l_y + l_x + 2)} \times \frac{\Gamma(n + l_y + 3/2) \Gamma(n + l_x + 3/2)}{n! \Gamma(n + l_y + l_x + 2)} \times \left[ \delta_{nn'} \left(n + l_y + \frac{3}{2}\right) - \delta_{n(n'+1)} n \right] \quad (4.4.8)$$

Dans le cas où  $n = n'$  ou si  $n = n' + 1$ , l'expression de  $B_\alpha$  se simplifie respectivement en

$$B_\alpha = \frac{1}{K+3} \sqrt{\frac{(K'+2)(n+l_y+3/2)(n+l_y+l_x+2)}{K+2}} \quad (4.4.9)$$

ou

$$B_\alpha = \frac{-1}{K+1} \sqrt{\frac{(K'+2)(n+l_y+1)n}{K+2}} \quad (4.4.10)$$

Au cours de ce développement, nous avons considéré que  $l'_y = l_y + 1$ . Pour le cas où  $l'_y = l_y - 1$ , nous pouvons soit faire un développement similaire soit tenir compte du fait que  $B_\alpha$  est réel et donc symétrique.

Le résultat (4.4.8) du développement dans le cas où  $l'_y = l_y - 1$  est

$$\begin{aligned} B_\alpha &= N_{K'}^{l'_x l'_y} N_K^{l'_x l'_y + 1} \frac{1}{4} \frac{1}{\left(n + \frac{l'_y}{2} + \frac{l'_x}{2} + \frac{3}{2}\right) (2n' + l'_y + l'_x + 2)} \\ &\times \frac{\Gamma(n' + l'_y + 3/2) \Gamma(n' + l'_x + 3/2)}{n'! \Gamma(n' + l'_y + l'_x + 2)} \\ &\times \left[ \delta_{nn'} \left(n + l'_y + \frac{3}{2}\right) - \delta_{n'(n+1)} n' \right] \end{aligned} \quad (4.4.11)$$

Nous constatons donc bien que ce développement est équivalent à l'échange des nombres quantiques.

## 4.5 Problèmes de conventions

Nous avons déjà abordé le fait que au lieu de poser

$$x_i = \rho \cos \alpha_i \quad (4.5.1)$$

$$y_i = \rho \sin \alpha_i \quad (4.5.2)$$

dans le choix des coordonnées hypersphériques, nous pourrions décider d'adopter

$$x_i = \rho \sin \alpha_i \quad (4.5.3)$$

$$y_i = \rho \cos \alpha_i \quad (4.5.4)$$

comme dans l'article [7].

Si nous tenons compte de cette deuxième possibilité, l'opérateur multipolaire électrique 4.1.4 s'écrirait

$$M(E_1, \mu) = eZ_c \sqrt{\frac{Z_c}{A(A-Z_c)}} \rho \cos \alpha_c Y_{1\mu}(\hat{y}) \quad (4.5.5)$$

Quant à l'expression de l'élément de matrice  $B_\alpha$ , elle deviendrait

$$\begin{aligned} \langle \Phi_{K'}^{l'_x l'_y}(\alpha) | \cos \alpha | \Phi_K^{l_x l_y}(\alpha) \rangle &= N_{K'}^{l'_x l'_y} N_K^{l_x l_y} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \alpha)^{l_x + l'_x + 2} (\cos \alpha)^{l_y + l'_y + 3} \\ &\times P_{n'}^{l'_x + \frac{1}{2}, l'_y + \frac{1}{2}}(\cos 2\alpha) P_n^{l_x + \frac{1}{2}, l_y + \frac{1}{2}}(\cos 2\alpha) d\alpha \end{aligned} \quad (4.5.6)$$

ou, après substitution des variables,

$$\begin{aligned} B_\alpha &= N_{K'}^{l'_x l'_y} N_K^{l_x l_y} \int_{-1}^1 (1-x)^\gamma (1+x)^{\beta+1} 2^{-(\gamma+\beta+3)} \\ &\times P_{n'}^{\gamma, \beta+1}(x) P_n^{\gamma, \beta}(x) dx \end{aligned} \quad (4.5.7)$$

en supposant cette fois que  $\gamma = l_x + 1/2$  et  $\beta = l_y + 1/2$ .

Nous suivons le même raisonnement qu'à la section précédente en tenant compte cette fois de la propriété des polynômes de Jacobi qui lie  $P_n^{\gamma, \beta+1}(x)$  et  $P_n^{\gamma, \beta}(x)$  [9].

$$(1-x)P_n^{\gamma, \beta+1}(x) = \frac{(n+\beta+1)P_n^{\gamma, \beta}(x) - (n+1)P_{n+1}^{\gamma, \beta}(x)}{n + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + 1} \quad (4.5.8)$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned} B_\alpha &= N_{K'}^{l'_x l'_y} N_K^{l_x l_y} 2^{-(\gamma+\beta+3)} h_n(\gamma, \beta) \\ &\times \left[ \delta_{nn'} \frac{n' + \beta + 1}{n' + \frac{\gamma}{2} + \frac{\beta}{2} + 1} + \delta_{n(n'+1)} \frac{n' + 1}{n' + \frac{\gamma}{2} + \frac{\beta}{2} + 1} \right] \end{aligned} \quad (4.5.9)$$

Sachant que  $l_x = l_y$ , nous constatons que le changement de conventions implique seulement un changement de signe dans le cas où  $n = n' + 1$ . L'équation équivalente à l'équation (4.4.8) est :

$$\begin{aligned} B_\alpha &= N_{K'}^{l'_x l'_y} N_K^{l_x l_y} \frac{1}{4} \frac{1}{\left(n' + \frac{l_y}{2} + \frac{l_x}{2} + \frac{3}{2}\right) (2n + l_y + l_x + 2)} \\ &\times \frac{\Gamma(n + l_y + 3/2) \Gamma(n + l_x + 3/2)}{n! \Gamma(n + l_y + l_x + 2)} \\ &\times \left[ \delta_{nn'} \left(n + l_y + \frac{3}{2}\right) - \delta_{n(n'+1)} n \right] \end{aligned} \quad (4.5.10)$$

Nous sommes confrontés à cette différence dans le calcul analytique et numérique des éléments de matrice hyperangulaires.

	$B_\alpha$	$\langle K'l'_x l'_y L'S'   \sin\alpha Y_{1\mu}(\hat{y})   Kl_x l_y LS \rangle$
$\langle 10110   \sin\alpha Y_{1\mu}(\hat{y})   00000 \rangle$	0.707107	-0.199471
$\langle 10110   \sin\alpha Y_{1\mu}(\hat{y})   20000 \rangle$	-0.353553	$9.97356E - 02$
$\langle 30110   \sin\alpha Y_{1\mu}(\hat{y})   20000 \rangle$	0.612372	-0.172747
$\langle 11011   \sin\alpha Y_{1\mu}(\hat{y})   21111 \rangle$	0.612372	$9.97356E - 02$
$\langle 31011   \sin\alpha Y_{1\mu}(\hat{y})   21111 \rangle$	-0.353553	$-5.75824E - 02$
$\langle 31211   \sin\alpha Y_{1\mu}(\hat{y})   21111 \rangle$	0.707107	$8.14338E - 02$
$\langle 31221   \sin\alpha Y_{1\mu}(\hat{y})   21111 \rangle$	0.707107	-0.141047
$\langle 30110   \sin\alpha Y_{1\mu}(\hat{y})   40000 \rangle$	-0.408248	0.115165
$\langle 50110   \sin\alpha Y_{1\mu}(\hat{y})   40000 \rangle$	0.577350	-0.162867
$\langle 31011   \sin\alpha Y_{1\mu}(\hat{y})   41111 \rangle$	0.577350	$9.40316E - 02$
$\langle 51011   \sin\alpha Y_{1\mu}(\hat{y})   41111 \rangle$	-0.408248	$-6.64904E - 02$
$\langle 31211   \sin\alpha Y_{1\mu}(\hat{y})   41111 \rangle$	-0.288675	$-3.32452E - 02$
$\langle 51211   \sin\alpha Y_{1\mu}(\hat{y})   41111 \rangle$	0.645497	$7.43385E - 02$
$\langle 31221   \sin\alpha Y_{1\mu}(\hat{y})   41111 \rangle$	-0.288675	$5.75824E - 02$
$\langle 51221   \sin\alpha Y_{1\mu}(\hat{y})   41111 \rangle$	0.645497	-0.128758

TAB. 4.1 – Valeurs numériques obtenues pour  $B_\alpha$  et pour la partie hyperangulaire de quelques éléments de matrice utiles

## 4.6 Calcul numérique

Il est tout d’abord important de préciser que, dans toute la partie numérique de ce travail de fin d’étude, notre optique a été de développer chaque étape isolément. En ce qui concerne les éléments de matrice décrits dans ce chapitre, nous avons donc commencé par modéliser  $B_\alpha$ .

Nous choisissons d’utiliser l’expression (4.4.8) et non pas sur les deux expressions simplifiées (4.4.9) et (4.4.10). Ce choix est purement arbitraire. Nous avons tenu compte de la symétrie de  $B_\alpha$  pour éviter de numériser deux fois le même type de développement ((4.4.8) et (4.4.11)). Dans le cas où  $l'_y = l_y - 1$ , nous échangeons donc les valeurs de  $l'_y$  et  $l_y$ , et de  $n'$  et  $n$ . Le calcul est ensuite exactement le même.

Nous modélisons, ensuite, toute la partie hyperangulaire de l’élément de matrice. L’équation sur laquelle nous nous basons est l’équation (4.2.4). Comme les règles de sélection ont été déduites du calcul qui mène à cette expression, nous en tenons compte déjà à ce stade.

Dans la table (4.1), nous donnons les valeurs numériques obtenues pour quelques éléments de matrice utiles. Nous nous servirons, en effet, de ces valeurs pour le calcul analytique de l’amplitude de transition.

Comme nous l’avons vu, le signe de  $B(\alpha)$  est négatif quand  $n = n' + 1$ . Le

changement de signe entre  $B_\alpha$  et  $\langle K'l'_x l'_y L' S' | \sin \alpha Y_{1\mu}(\hat{y}) | K l_x l_y L S \rangle$  est dû au facteur  $(-)^{L+l_x+l_y+1}$ .

## Chapitre 5

# L'amplitude de transition pour des noyaux à halo de deux neutrons

### 5.1 Définition générale de l'amplitude de transition

La réaction que nous étudions dans ce travail est la dissociation coulombienne. La section efficace pour cette réaction peut s'écrire de la manière suivante [7] :

$$\frac{d\sigma(E1)}{dE} = \frac{N_{E1}(E^*)}{\hbar c} \frac{16\pi^3}{9} \frac{dB(E1)}{dE} \quad (5.1.1)$$

$E^* = E_0 + E$  est l'énergie d'excitation,  $E_0$  l'énergie de liaison et  $E$  l'énergie du continu.  $dB(E1)/dE$  est l'amplitude de transition et  $N_{E1}(E^*)$  le spectre de neutrons virtuel [15, 16].

Sachant que nous travaillerons avec des noyaux borroméens, nous considérons le cas où l'état initial est le seul état lié du système. Pour l'état final, nous tenons compte de tous les états finaux possibles appartenant au continu.

Dans le but de pouvoir obtenir l'expression de la section efficace de réaction (équation (5.1.1)), nous devons tout d'abord calculer l'amplitude de transition  $\frac{dB(E1)}{dE}$  d'après son expression générale [7].

$$\frac{dB(E1)}{dE} = \frac{1}{2J_i + 1} \sum_{M_i} \sum_{\mu=-1,0,1} \int d\tau_f \left| \langle f | M_\mu^{(1)} | i; J_i M_i \rangle \right|^2 \delta(E_f - E) \quad (5.1.2)$$

$d\tau_f$  est l'élément d'espace des phases pour l'état final et  $M_\mu^{(1)}$  est l'opérateur multipolaire électrique décrit à la section 4.1.  $|i\rangle$ ,  $|f\rangle$  sont l'état initial et l'état final

dans le système du centre de masse qui sont tous deux normalisés de la manière suivante :

$$\langle i|i \rangle = 1 \quad (5.1.3)$$

$$\langle f|f' \rangle = \delta(\tau_f - \tau'_f) \quad (5.1.4)$$

Dans le cas d'un état final discret, comme celui que nous étudions, plutôt que continu, la notation  $\int d\tau_f$  implique l'inclusion d'une sommation sur les nombres quantiques décrivant l'état final.

En tenant compte du fait que pour l'état lié du système  $J_i = 0$ , et  $M_i = 0$ , que les éléments de matrice (4.2.1) sont indépendants de  $\mu$  et que [7]

$$\int d\tau_f = 4 \left( \frac{m_N}{\hbar^2} \right)^3 \sum_{K\gamma} \int E_f^2 dE_f \quad (5.1.5)$$

l'équation 5.1.2 s'écrit :

$$\frac{dB(E1)}{dE} = 3 \times 4 \left( \frac{m_N}{\hbar^2} \right)^3 \sum_{K\gamma} \int E_f^2 \left| \langle \Psi_{J'M'} | M_\mu^{(1)} | \Psi_{00} \rangle \right|^2 dE_f \delta(E_f - E) \quad (5.1.6)$$

Dans cette expression, nous avons repris les notations du paragraphe (4.1.2) pour les états initial et final.

Considérons à présent la définition de l'opérateur multipolaire électrique (4.1.4) et l'équation (4.2.1). Nous pouvons isoler les parties hyperradiale et hyperangulaire. L'équation (5.1.6) devient

$$\begin{aligned} \frac{dB(E1)}{dE} &= 12 \left( \frac{m_N}{\hbar^2} \right)^3 (eZ_c)^2 \frac{Z_c}{A(A-Z_c)} \sum_{K\gamma} E_f^2 \\ &\times \left| \langle \chi_{K'\gamma}^{J'}(\rho) \rho^{-5/2} | \rho | \chi_{K\gamma}^0(\rho) \rho^{-5/2} \rangle \right. \\ &\times \left. \left\langle \left[ \Gamma_{K'L'M'_L}^{l'_x l'_y}(\Omega) \otimes \theta_{S'} \right]_{J'M'} \left| \sin \alpha_c Y_{1\mu}(\hat{y}) \right| \left[ \Gamma_{KLM_L}^{l_x l_y}(\Omega) \otimes \theta_S \right]_{00} \right\rangle \right|^2 \end{aligned} \quad (5.1.7)$$

L'expression complète de la partie hyperangulaire est donnée par les équations (4.2.4) et (4.4.8) et celle de la partie hyperradiale sera développée dans la suite de ce chapitre.

## 5.2 Approximations pour l'état initial

Nous rappelons ici que le but de ce travail est de comparer les résultats obtenus pour l'amplitude de transition (5.1.7) sur base de deux approximations qui portent

principalement sur l'expression de la partie hyperradiale de la fonction d'onde initiale.

La première est décrite dans l'article [7] et mène à un calcul analytique de l'amplitude de transition. Dans un premier temps, nous reproduisons ce calcul. L'avantage d'un calcul analytique est sa simplicité. Nous pouvons donc nous baser sur la même démarche de calcul, mais en remplaçant cette fois la partie hyperradiale de la fonction d'onde initiale par une fonction plus réaliste, pour calculer l'amplitude de transition sur base d'une autre approximation. C'est ce que nous faisons dans un second temps.

Dans cette section, nous discutons les différentes approximations faites pour l'état initial du noyau. En toute généralité, celui-ci est donné par l'équation (3.3.1). Nous discutons d'abord les approximations faites sur la partie hyperradiale et ensuite, de manière plus générale, sur les fonctions d'onde partielles utilisées dans l'expression (3.3.1).

### 5.2.1 Fonctions hyperradiales

Nous cherchons à modéliser les fonctions hyperradiales  $\chi'_{K\gamma}(\rho)$  solutions de l'équation (2.2.6).

Une première optique [7, 12] est de trouver des fonctions  $\chi'_{K\gamma}(\rho)$  telles que le calcul analytique de l'élément de matrice hyperradial  $A_p$  (4.2.5) soit aisé et donc aussi celui de l'amplitude de transition. Nous allons modéliser  $\chi'_{K\gamma}(\rho)$  de manière à respecter un maximum le comportement à l'origine et le comportement asymptotique de l'état lié déterminé au chapitre 3 (équations (3.1.2) et (3.2.6)).

Nous appellerons désormais cette façon d'évaluer l'amplitude de transition le modèle de C. Forssén et al. et nous noterons les fonctions hyperradiales associées  $\chi_F(\rho)$ .

Etant donné que les fonctions hyperradiales  $\chi'_{K\gamma}(\rho)$  devraient se comporter similairement pour  $\rho$  suffisamment grand et que c'est la région qui nous intéresse, la première approximation que nous faisons est d'utiliser la même fonction hyperradiale pour tous les termes de l'équation (3.3.1) [7, 12].

Sachant que le comportement asymptotique des fonctions hyperradiales pour l'état lié est donné par l'équation (3.2.6), une première possibilité pour notre modélisation serait la fonction hyperradiale normalisée suivante :

$$\chi_F^{(1)}(\rho) = \sqrt{2\kappa_0} e^{-\kappa_0 \rho} \quad (5.2.1)$$

où  $\kappa_0$  est lié à l'énergie de liaison via  $E_0 = \frac{(\hbar\kappa_0)^2}{2m_N}$  ( $E_0 = 0.98$  MeV pour l' $^6\text{He}$  et  $0.295$  MeV pour le  $^{11}\text{Li}$ ). Cette fonction surestime le comportement pour les petites valeurs de  $\rho$  (3.1.2) mais le comportement à l'infini est bien modélisé.

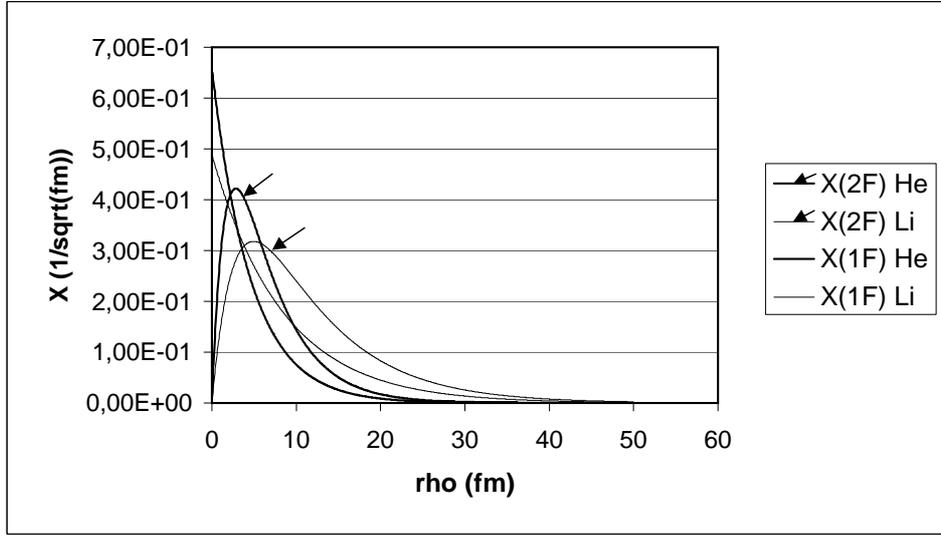


FIG. 5.1 – Comparaison entre les fonctions hyperradiales  $\chi_F^{(1)}(\rho)$  (équation (5.2.1)) et  $\chi_F^{(2)}(\rho)$  (équation (5.2.2)) pour l' ${}^6\text{He}$  et le  ${}^{11}\text{Li}$

Pour résoudre ce problème, nous allons additionner un terme de la même forme exponentielle qui permet de reproduire simultanément le comportement à l'infini et celui en zéro. La fonction 5.2.1 devient :

$$\chi_F^{(2)}(\rho) = c [e^{-\kappa_0\rho} - e^{-\kappa_1\rho}] \quad (5.2.2)$$

où  $c = \sqrt{\frac{2\kappa_0\kappa_1(\kappa_0+\kappa_1)}{(\kappa_0-\kappa_1)^2}}$ .

Le fait d'imposer que  $\kappa_1 > \kappa_0$  assure que le deuxième terme décroît plus vite que le premier et donc que le comportement à l'infini est préservé. Les valeurs de  $\kappa_0$  et  $\kappa_1$  adoptées pour l' ${}^6\text{He}$  et le  ${}^{11}\text{Li}$  seront données dans la suite (table 6.1).

Sur la figure 5.1, les fonctions  $\chi_F^{(1)}(\rho)$  (équation (5.2.1)) et  $\chi_F^{(2)}(\rho)$  (équation (5.2.2)) sont représentés pour l' ${}^6\text{He}$  et le  ${}^{11}\text{Li}$  en fonction de l'hyperrayon  $\rho$ . Si nous regardons les courbes représentant les deux fonctions pour un des deux noyaux, l' ${}^6\text{He}$  par exemple, nous constatons bien que leur comportement asymptotique est semblable tandis que leur comportement pour  $\rho \leq 10 \text{ fm}$  est très différent. Pour  $\chi_F^{(1)}(\rho)$ , la courbe ne s'annule pas à l'origine et est décroissante tandis que pour  $\chi_F^{(2)}(\rho)$ , elle part de zéro et croît jusqu'à un maximum qui se trouve entre 0 et 10 fm. Ce deuxième comportement est plus proche de celui attendu (3.1.2).

Nous avons également représenté sur cette figure les fonctions  $\chi_F^{(1)}(\rho)$  et  $\chi_F^{(2)}(\rho)$  dans le cas du  ${}^{11}\text{Li}$ . Cela nous permet de voir l'influence des paramètres  $\kappa_0$  et  $\kappa_1$ , qui diffèrent d'un noyau à l'autre, sur ces fonctions.

En tenant compte du fait que nous pouvons utiliser la même fonction hyperradiale pour tous les termes de l'équation (3.3.1) ainsi que des deux modélisations possibles (5.2.1) et (5.2.2), l'expression de la fonction d'onde totale devient :

$$\Psi_{JM} = \rho^{-5/2} \chi_F^{(1,2)}(\rho) \sum_{K\gamma} \left[ \Gamma_{KLM_L}^{l_x l_y}(\Omega_i) \otimes \theta_S \right]_{JM} \quad (5.2.3)$$

Les différentes fonctions d'onde partielles n'ont pas le même poids dans le développement de la fonction d'onde totale (5.2.3). Nous justifierons dans la section suivante cette affirmation pour des cas où le nombre de fonctions d'onde partielles est limité. Nous allons donc pondérer les différentes contributions de la manière suivante :

$$\Psi_{JM} = \rho^{-5/2} \chi^{(1,2)}(\rho) \sum_{K\gamma} \sqrt{w_{K\gamma}} \left[ \Gamma_{KLM_L}^{l_x l_y}(\Omega_i) \otimes \theta_S \right]_{JM} \quad (5.2.4)$$

où  $\sum_{KS} w_{KS} = 1$ .

De manière à garder la notation générale de l'équation (3.3.1) et à pouvoir confronter cette première approche avec la deuxième que nous développons tout de suite après, nous posons

$$\chi_{K\gamma}^J(\rho) = \chi_F(\rho) = \sqrt{w_{K\gamma}} \chi_F^{(1,2)}(\rho) \quad (5.2.5)$$

Notons que ces fonctions ne sont plus indépendantes de la fonction d'onde partielle à laquelle elles se rapportent. La mise en évidence dans l'équation 5.2.3 n'est donc plus valable.

Une deuxième approche [6] est d'utiliser les fonctions hyperradiales plus réalistes  $\chi_{K\gamma}^J(\rho)$  qui sont les solutions exactes du système d'équations différentielles (2.2.6) [12]. Dans ce cas, deux types de potentiel sont considérés, un potentiel  $\alpha - n$  et un potentiel  $n - n$ . Ces potentiels décrivent donc les interactions existant entre les différentes particules du système de trois corps. Nous appellerons ces fonctions  $\chi_R(\rho)$ . Elles ne sont pas non plus indépendantes de la fonction d'onde partielle à laquelle elles se rapportent.

A la figure 5.2, nous avons comparé les fonctions  $\chi_R(\rho)$  aux fonctions  $\chi_F^2(\rho)$  pour l'<sup>6</sup>He et pour certaines valeurs de  $K$  et  $\gamma$ . Nous avons choisi  $\chi_F^2(\rho)$  pour cette comparaison car c'est la fonction  $\chi_F(\rho)$  qui est la plus réaliste. Dans ce cas,  $\gamma = 0$  signifie que les quatre nombres quantiques  $L$ ,  $S$ ,  $l_x$  et  $l_y$  sont nuls et  $\gamma = 1$ , qu'ils sont tous égaux à 1. Nous commenterons ces résultats aux vus de la section suivante.

## 5.2.2 Fonctions d'onde partielles

D'après [7] et [12], nous réduisons le développement (3.3.1) aux termes correspondant aux configurations les plus probables du système à trois corps. Les termes dominants de la fonction d'onde correspondent généralement aux valeurs

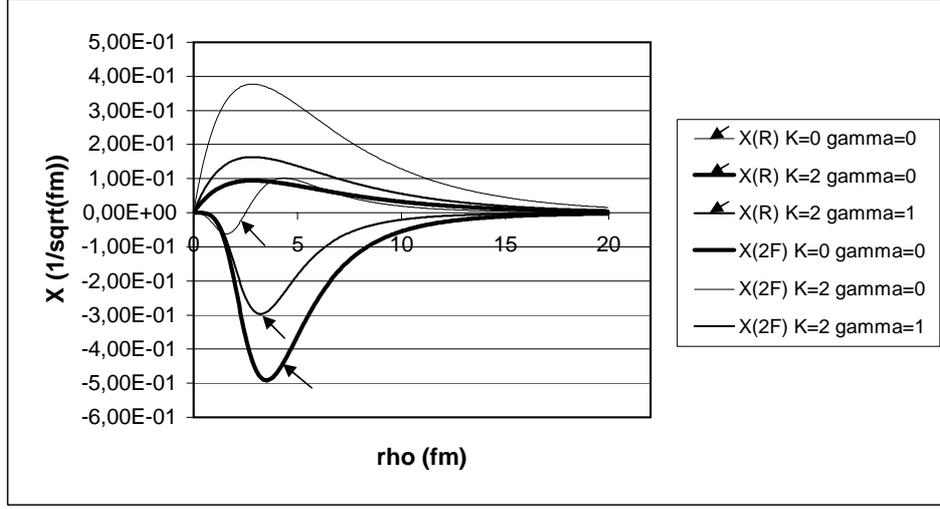


FIG. 5.2 – Comparaison des fonctions  $\chi_F^2(\rho)$  et  $\chi_R(\rho)$  pour l' ${}^6\text{He}$  et pour  $K_{max} = 2$ .

de  $K$  possibles les plus basses qui sont autorisées par le principe de Pauli. En effet, les valeurs de  $K$  plus élevées donnent une petite contribution à la fonction d'onde totale à cause de l'effet de la barrière centrifuge.

Dans le calcul analytique de C. Forssén et al., nous ne considérerons que les valeurs de  $K$  égales à 0 et 2 aussi bien pour  ${}^6\text{He}$  que pour  ${}^{11}\text{Li}$ . Les valeurs 1 et 3 ainsi que le triplet (011) sont exclues si on tient compte du fait que  $n = (K - l_x - l_y)/2$  est entier et que  $l_x = l_y$  (principe d'antisymétrisation). Dans un calcul plus réaliste tel que celui effectué dans le cadre de l'article [6], nous allons jusqu'à des valeurs plus élevées de  $K_{max}$  mais le nombre de termes reste limité ( $K_{max}=24$ ).

Dans le cas analytique, l'équation (3.3.1) devient donc :

$$\begin{aligned} \rho^{5/2}\Psi_{JM} \cong & [\chi_{00}^0(\rho)\Gamma_{000}^{00}(\Omega_i) + \chi_{20}^0(\rho)\Gamma_{200}^{00}(\Omega_i)]\theta_{00} \\ & + \chi_{21}^0(\rho)[\Gamma_{21}^{11}(\Omega_i) \otimes \theta_1]_{J=0} \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

Les fonctions  $\chi_{K\gamma}^J(\rho)$  font référence soit aux  $\chi_R(\rho)$  déterminées dans l'article [6],  $\chi_F(\rho)$ , soit à celles définies par l'équation (5.2.4),  $\chi_l(\rho)$ , suivant l'approche choisie.

Puisque le nombre de  $K$  dans le cas analytique est très limité, nous pouvons choisir des valeurs pour les coefficients de pondération (équation (5.2.4)) et justifier ce choix.

Pour l' ${}^6\text{He}$  [7], il faut tenir compte du fait que les nucléons remplissent des couches en respectant le principe d'exclusion de Pauli. L'interaction  $\alpha - n$  est donc répulsive dans les états  $s$  et attractive dans les états  $p$ . A cause de cela la contribution de la composante  $K = 0$  est faible et la première valeur de  $K$  qui n'est pas

exclue par le principe de Pauli est  $K = 2$ . La contribution de  $K = 2$  à la fonction d'onde est composée de deux termes ( $S = 0$  ou  $1$ ). Le terme avec  $S = 0$  a un poids prédominant parce que l'attraction  $n - n$  est décrite par une onde  $s$ .

Revenons sur le commentaire de la figure 5.2. Nous avons représenté les fonctions hyperradiales des différents termes décrits au paragraphe précédent. Nous constatons qu'il existe un noeud pour la courbe  $\chi_2(\rho)$ ,  $K, \gamma = 0$  mais pas pour son homologue pour  $\chi_1(\rho)$ . Nous avons aussi des signes différents entre les différentes courbes ayant les mêmes nombres quantiques. Mais, malgré ces différences, l'ensemble des trois courbes correspondant à chacune des approximations  $\chi_{K\gamma}^J(\rho)$  est normé et les contributions des différentes composantes ( $K, \gamma = 0, 0$ ,  $K, \gamma = 2, 0$  et  $K, \gamma = 2, 2$ ) sont semblables.

Dans le cas du  $^{11}\text{Li}$  [12], les valeurs 0 et 2 correspondent respectivement aux configurations  $(s_{1/2})^2$  et  $(p_{1/2})^2$  pour les neutrons de valence. La première fonction d'onde considérée est un état purement  $(s_{1/2})^2$ , les deux suivantes correspondent à un mélange homogène des états  $(s_{1/2})^2$  et  $(p_{1/2})^2$ .

### 5.3 Calcul analytique de l'amplitude de transition

L'expression générale de l'amplitude de transition (5.1.7) peut être développée analytiquement en utilisant la première approche faite à la section précédents pour l'état initial, c'est à dire en utilisant  $\chi_F(\rho)$  comme fonction hyperradiale, et l'état libre (3.3.9) comme état final. Nous considérons tout d'abord  $\chi_F^2(\rho)$  qui est la fonction  $\chi_F(\rho)$  la plus réaliste. L'état initial est donc modélisé par l'équation

$$\begin{aligned} \rho^{5/2} \Psi_{JM} &\cong \chi_1^{(2)}(\rho) \\ &\times \left\{ \left[ \sqrt{w_{00}} \Gamma_{000}^{00}(\Omega) + \sqrt{w_{20}} \Gamma_{200}^{00}(\Omega) \right] \theta_{00} + \sqrt{w_{21}} \left[ \Gamma_{211}^{11}(\Omega) \otimes \theta_1 \right]_{J=0} \right\} \end{aligned} \quad (5.3.1)$$

Dans ce cadre, l'élément de matrice qui intervient dans l'expression (5.1.7) s'écrit :

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{J'M'} | M_\mu^{(1)} | \Psi_{JM} \rangle &= \langle \frac{J_{K+2}(\kappa\rho)}{(\kappa\rho)^2} \left[ \Gamma_{KLM_L}^{J_x J_y}(\Omega) \otimes \theta_S \right]_{J'M'} | M_\mu^{(1)} | \frac{\chi_1^{(2)}(\rho)}{\rho^{5/2}} \\ &\times \left[ \left[ \sqrt{w_{00}} \Gamma_{000}^{00}(\Omega) + \sqrt{w_{20}} \Gamma_{200}^{00}(\Omega) \right] \theta_{00} \right. \\ &\left. + \sqrt{w_{21}} \left[ \Gamma_{211}^{11}(\Omega) \otimes \theta_1 \right]_{J=0} \right] \rangle \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

dans lequel  $\chi_1^{(2)}$  est donné par l'équation (5.2.2) et la définition de l'opérateur multipolaire électrique par (4.1.4).

Le calcul analytique complet de l'amplitude de transition est fait dans l'annexe (C) en tenant compte des propriétés des fonctions de Bessel [17] et des éléments

de matrice hyperangulaires calculés à la section 4.6. Le résultat final de ce calcul est :

$$\frac{dB(E1)}{dE} = 2Dc^2E^3 \sum_1^{i,j=0} (-1)^{i+j} \times \frac{\alpha_1 F_1(y_i) F_1(y_j) + \alpha_2 F_2(y_i) F_2(y_j)}{[(E_i + E)(E_j + E)]^{11/4}} \quad (5.3.3)$$

avec

$$\alpha_1 = \frac{1}{8} \left( \frac{315}{2^{10}} \right)^2 (1 + 3w_{00} + 4\sqrt{w_{00}w_{20}}) \quad (5.3.4)$$

$$\alpha_2 = \frac{3}{2} \left( \frac{9009}{2^{17}} \right)^2 (w_{20} + w_{21}) \quad (5.3.5)$$

Dans cette équation,  $E = (\hbar\kappa)^2/2m_N$  et  $E_{0,1} = (\hbar\kappa_{0,1})^2/2m_N$ . Les constantes  $\kappa_0$ ,  $\kappa_1$  et  $c$  sont définies à la section (5.2.1) et la constante  $D$  est définie de la manière suivante [7] :

$$D = \frac{3}{2} \frac{(eZ_c)^2}{A(A-Z_c)} \left( \frac{\hbar^2}{2m_N} \right)^{3/2} E^{-5/2} \quad (5.3.6)$$

Les quantités  $y_{0,1}$  valent

$$y_i = \frac{E}{E + E_i} \quad (5.3.7)$$

et, finalement,

$$F_1(y_i) = F\left(\frac{11}{4}; \frac{3}{4}; 4; y_i\right) \quad (5.3.8)$$

et

$$F_2(y_i) = y_i F\left(\frac{15}{4}; \frac{7}{4}; 6; y_i\right) \quad (5.3.9)$$

$F(\alpha, \beta, \gamma, z)$  est la fonction hypergéométrique  ${}_2F_1$ .

Dans le cas où la partie hyperradiale de l'état initial est modélisée par la fonction  $\chi_F^1(\rho)$  (équation (5.2.1)) plutôt que par  $\chi_F^2(\rho)$  (équation (5.2.2)), nous devons remplacer  $c^2$  par  $2\kappa_0$  et  $i$  et  $j$  par 0 dans l'expression (5.3.3) pour obtenir le résultat correct.

Dans l'article [12], une expression de l'amplitude de transition a été développée de manière similaire mais pour un état initial auquel nous avons rajouté une composante ( $K = 4$ ) par rapport à (5.3.1).

$$\frac{dB(E1)}{dE} = Dc^2E^3 \frac{\sum_1^{i,j=0} (-1)^{i+j}}{[(E_i + E)(E_j + E)]^{11/4}} \times [\alpha_1 F_1(y_i) F_1(y_j) + \alpha_2 F_2(y_i) F_2(y_j) + \alpha_3 F_3(y_i) F_3(y_j)] \quad (5.3.10)$$

avec

$$\alpha_1 = \frac{1}{4} \left( \frac{315}{2^{10}} \right)^2 (4w_{00} + w_{20} + w_{21} + 4\sqrt{w_{00}w_{20}}) \quad (5.3.11)$$

$$\alpha_2 = 3 \left( \frac{9009}{2^{17}} \right)^2 \left( w_{20} + w_{21} + \frac{4}{9}w_{40} + \frac{4}{3}\sqrt{w_{20}w_{40}} \right) \quad (5.3.12)$$

$$\alpha_3 = \frac{3}{2} \left( \frac{36465}{2^{20}} \right)^2 w_{40} \quad (5.3.13)$$

et

$$F_3(y_i) = y_i^2 F \left( \frac{19}{4}; \frac{11}{4}; 8; y_i \right) \quad (5.3.14)$$

Les autres variables ont déjà été définies plus haut.

## Chapitre 6

# Résultats numériques pour l'amplitude de transition

### 6.1 Fonctions hyperradiales simplifiées $\chi_F(\rho)$

Dans un premier temps, nous avons calculé numériquement les expressions analytiques de l'amplitude de transition  $\frac{dB(E1)}{dE}$  (modèle analytique de C. Forssén et al.) calculées à la section 5.3. Le but de ce calcul est d'avoir des valeurs de référence pour vérifier l'exactitude des autres calculs numériques, plus complexes, que nous commenterons dans la suite de ce chapitre.

Les expressions utilisées pour ce calcul sont l'équation (5.3.3) pour  ${}^6\text{He}$  et l'équation (5.3.10) pour le  ${}^{11}\text{Li}$ .

Ces expressions sont calculées pour différentes fonctions d'onde obtenues à l'aide des fonctions hyperradiales  $\chi_F(\rho)$  décrites à la section 5.2. Dans les tables 6.1 et 6.2, nous avons synthétisé les valeurs des différents paramètres qui interviennent dans leurs expressions.

Notons que pour les deux fonctions  $\chi_F^1(\rho)$ , nous avons utilisé l'approximation (5.2.1) mais que dans tous les autres cas il s'agit de l'approximation (5.2.2). Les paramètres qui différencient les différentes fonctions  $\chi_F^2(\rho)$  sont les poids des

	$w_{00}$	$w_{20}$	$w_{21}$	$\kappa_0$	$\kappa_1$
$\chi_F^1({}^6\text{He})$	0	1	0	0.21746	—
$\chi_F^2({}^6\text{He set 1})$	0	1	0	0.21746	0.5370
$\chi_F^2({}^6\text{He set 2})$	0.05	0.80	0.15	0.21746	0.5370

TAB. 6.1 – Valeurs des différents paramètres qui interviennent dans les différentes expressions de la fonction hyperradiale  $\chi_F(\rho)$  pour  ${}^6\text{He}$  [7]

	$w_{00}$	$w_{20}$	$w_{21}$	$w_{40}$	$\kappa_0$	$\kappa_1$
$\chi_F^1(^{11}\text{Li})$	1	0	0	0	0.1193	—
$\chi_F^2(^{11}\text{Li set 1})$	1	0	0	0	0.1193	0.3173
$\chi_F^2(^{11}\text{Li set 2})$	$\sqrt{1/2}$	$-\sqrt{1/6}$	$\sqrt{1/3}$	0	0.1193	0.3173
$\chi_F^2(^{11}\text{Li set 3})$	$\sqrt{1/2}$	$\sqrt{1/6}$	$-\sqrt{1/3}$	0	0.1193	0.3173

TAB. 6.2 – Valeurs des différents paramètres qui interviennent dans les différentes expressions de la fonction hyperradiale  $\chi_F(\rho)$  pour le  $^{11}\text{Li}$  [12]

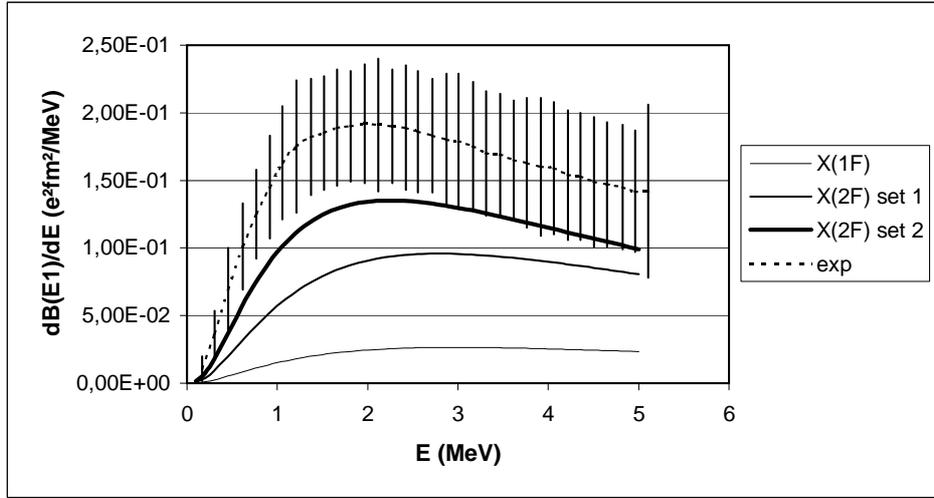


FIG. 6.1 – Comparaison de l'amplitude de transition  $\frac{dB(E1)}{dE}$  calculée sur base de  $\chi_F^1(^6\text{He})$ ,  $\chi_F^2(^6\text{He, set 1})$  et  $\chi_F^2(^6\text{He, set 2})$  avec les données expérimentales de T. Aumann et al. [18].

fonctions d'onde partielles. Nous les distinguons entre elles par le numéro de leur 'set'.

A la figure 6.1, nous avons comparé les différents résultats numériques du modèle de C. Forssén et al. pour l' $^6\text{He}$  avec les données expérimentales de T. Aumann et al. disponibles dans [18] afin d'estimer la validité du modèle .

Nous constatons tout d'abord que la forme du spectre expérimental est bien reproduite par ce modèle, surtout dans le cas où nous utilisons la version la plus complète de la fonction d'onde  $\chi_F^2(^6\text{He, set 2})$ . Nous constatons également que le maximum de la courbe se trouve à énergie plus basse pour  $\chi_F^2(^6\text{He, set 2})$  que pour  $\chi_F^2(^6\text{He, set 1})$ . Ce phénomène s'explique sans doute par le fait que l'on ajoute la contribution de l'état initial caractérisé par  $K = 0$  pour  $\chi_F^2(^6\text{He, set 2})$ .

Pour les noyaux à halo, seules les valeurs de  $\rho$  relativement importantes contri-

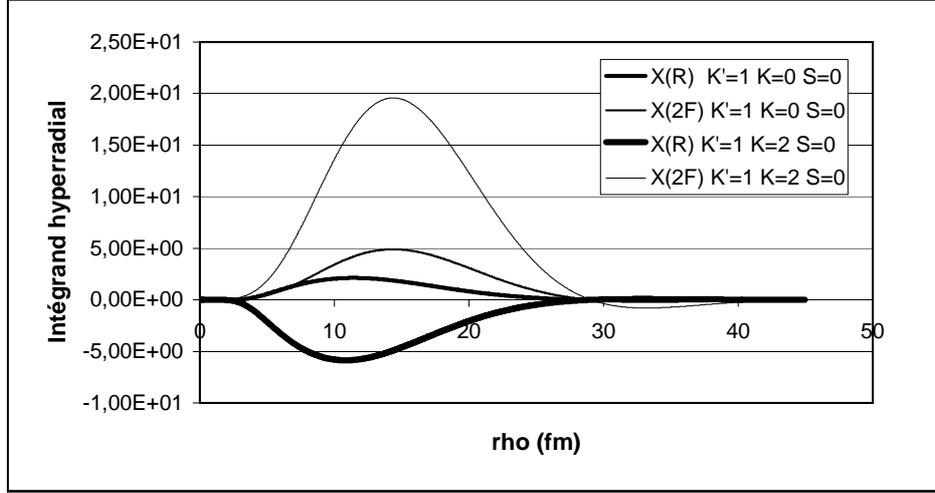


FIG. 6.2 – Comparaison entre les intégrands de l'intégrale hyperradiale (6.1.1) pour  $\chi_F^{(2)}(\rho)$  et  $\chi_F(\rho)$ ,  $E = 1$ .

buent significativement à l'amplitude de transition. La figure 6.2, qui donne les valeurs des intégrands de l'intégrale hyperradiale (6.1.1) entre autres pour  $\chi_F^{(2)}(\rho)$  en fonction de  $\rho$ , montre que cette caractéristique est bien modélisée par cette approximation de l'état initial.

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{J_{K+2}(\kappa\rho)}{(\kappa\rho)^2} \left| \rho \right| \frac{\chi_{K\gamma}^J(\rho)}{\rho^{5/2}} \right\rangle &= \kappa^{-2} \\ &\times \int_0^\infty J_{K+2}(\kappa\rho) \chi_{K\gamma}^J(\rho) (\rho)^{\frac{3}{2}} d\rho \end{aligned} \quad (6.1.1)$$

où  $z = \kappa\rho$ .

Si l'ordre de grandeur de la section efficace de réaction augmente largement quand nous remplaçons  $\chi_F^1(^6He)$  par  $\chi_F^2(^6He, \text{set } 1)$ , la dépendance en énergie, elle, change très peu. Nous savons, en effet, que pour les valeurs de  $\rho$  qui nous intéressent, seul le premier terme de (5.2.2) est non négligeable et nous obtenons donc la même dépendance en énergie pour (5.2.2) que pour (5.2.1).

Aux énergies plus hautes, la fonction d'onde  $\chi_F^2(^6He, \text{set } 1)$  mène à une amplitude de transition qui décroît plus rapidement que pour  $\chi_F^1(^6He)$ . Cela est sans aucun doute dû au fait que la partie interne de la fonction hyperradiale, dans le cas d'un modèle à deux paramètres, contribue plus au résultat pour des énergies plus importantes, et que, de ce fait, les éléments de matrice hyperradiaux  $A_p$  (4.2.4) décroissent plus rapidement que pour la fonction à un paramètre. L'étude de l'intégrand de l'intégrale hyperradiale  $A_p$  (6.1.1) en fonction de l'énergie  $E$  et de l'hy-

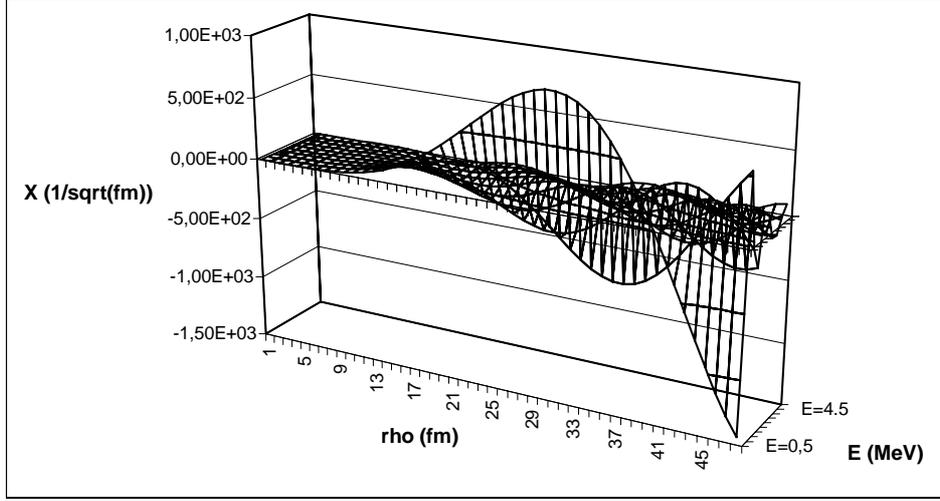


FIG. 6.3 – Intégrand de l’intégrale hyperradiale  $A_p$  (6.1.1) en fonction de l’énergie  $E$  et de l’hyperrayon  $\rho$  pour  $\chi_F^2(\rho)$ .

perayon  $\rho$  est faite à la figure 6.3 pour  $\chi_F^{(2)}(\rho)$ .

Comparons, à présent, les ordres de grandeur des amplitudes de transition calculées. Nous constatons directement que l’approximation  $\chi_F^1(^6He)$  de l’état initial mène à une amplitude de transition très basse (figure 6.1). L’ordre de grandeur est nettement plus proche de celui obtenu expérimentalement quand nous remplaçons  $\chi_F^1(^6He)$  par  $\chi_F^2(^6He, \text{set } 1)$  et ce résultat s’améliore encore pour  $\chi_F^2(^6He, \text{set } 2)$ .

Pour expliquer ce phénomène, nous sommes l’amplitude de transition  $\frac{dB(E1)}{dE}$  5.1.2 sur tous les états finaux. Nous obtenons [7] :

$$\int_0^\infty \frac{dB(E1)}{dE} dE = \frac{3}{4\pi} Z_c^2 e^2 \langle r_c^2 \rangle \quad (6.1.2)$$

où  $r_c$  est la distance entre le coeur et le centre de masse de tout le système et  $Z_c$  la charge du coeur. Notons que cette somme préserve strictement sa valeur si nous remplaçons les états finaux réels par un ensemble complet d’états finaux sans interaction. Dans le modèle de C. Forsén et al., l’amplitude de transition intégrée est donc déterminée par la valeur de  $r_c$ .

Nous pouvons, à présent, expliquer les différences entre les ordres de grandeur pour l’amplitude de transition. Pour  $\chi_F^1(^6He)$ , toutes les tailles du système sont sous-estimées simultanément (la distance entre le coeur et le centre de masse du système  $r_c$ , l’hyperrayon  $\rho_{rms}, \dots$ ) et il est donc naturel que ce modèle mène à une amplitude de transition basse. Pour la deuxième fonction d’onde  $\chi_F^2(^6He, \text{set } 1)$ , le rayon de matière  $R_{rms}$  est bien estimé mais  $r_c$  est légèrement sous-estimé. Et

	$r_c$
$\chi_F^1(^6He)$	0.67
$\chi_F^2(^6He, set 1)$	1.10
$\chi_F^2(^6He, set 2)$	1.20
Valeur attendue	1.1977

TAB. 6.3 – Estimations de la distance entre le coeur et le centre de masse de tout le système  $r_c$  pour les différentes fonctions d'onde  $\psi_1$  de  $1^6He$

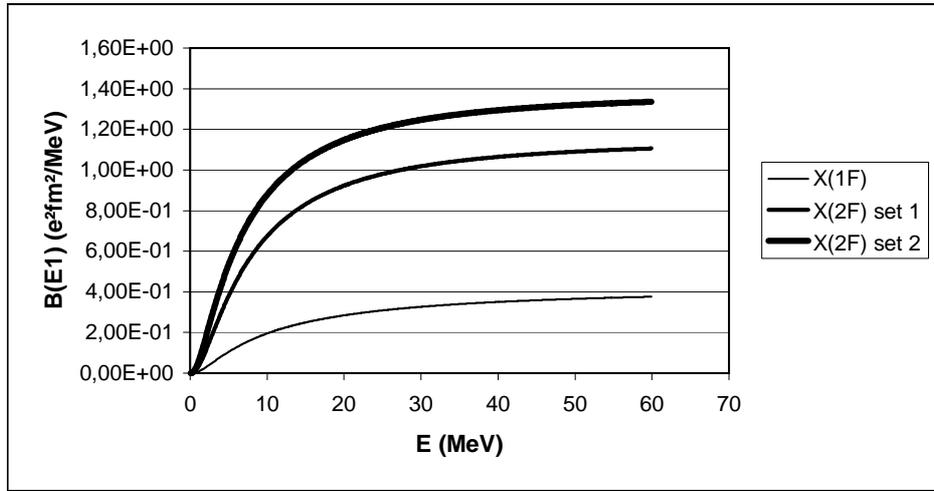


FIG. 6.4 – Amplitudes de transition intégrées sur  $E$  pour  $1^6He$ .

finalement, pour  $\chi_F^2(^6He, set 2)$ , le fait de considérer deux termes en plus (les valeurs des poids sont différentes) fait que les proportions géométriques de l'état sont légèrement différentes ce qui mène à des valeurs de  $r_c$  plus élevées.

Les valeurs de  $r_c$  pour les différents fonctions d'onde ainsi que la valeur attendue d'après [2] sont données dans la table 6.3.

La figure 6.4 confirme le fait que l'amplitude de transition intégrée converge pour des valeurs de l'énergie élevées.

En accord avec toute la discussion qui précède, l'effet principal du passage de la fonction  $\chi_F^1(^6He)$  à un paramètre (5.2.1) à  $\chi_F^2(^6He, set 1)$  à deux paramètre (5.2.2) dans le domaine d'énergie qui nous intéresse est de multiplier l'amplitude de transition par un facteur  $c^2 / (2\kappa_0) = 4$ .

La figure 6.5 donne les valeurs numériques de l'amplitude de transition pour le  $^{11}Li$  calculées à l'aide des fonctions résumées dans la table (4.1.2) ainsi que les valeurs expérimentales provenant des articles [19] et [20]. Le problème pour le

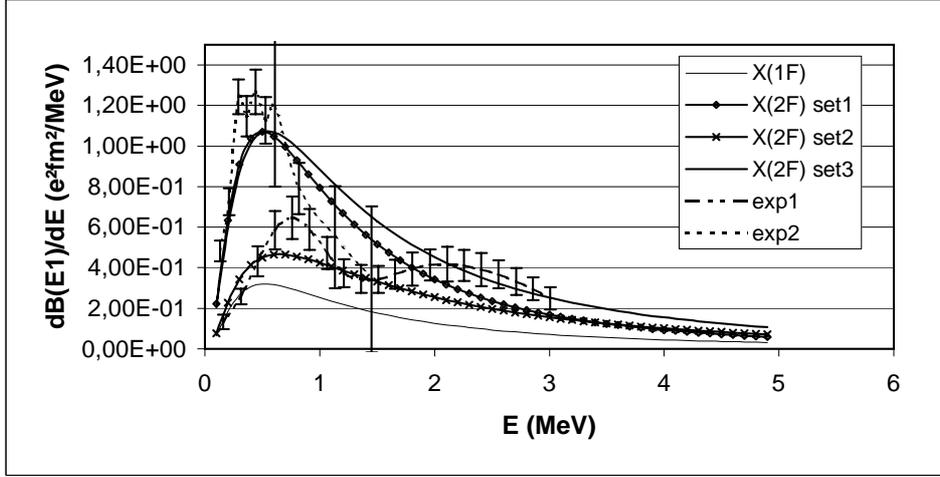


FIG. 6.5 – Comparaison de l'amplitude de transition  $\frac{dB(E1)}{dE}$  calculée sur base de  $\chi_F^1(^{11}\text{Li})$ ,  $\chi_F^2(^{11}\text{Li}, \text{set } 1)$ ,  $\chi_F^2(^{11}\text{Li}, \text{set } 2)$  et  $\chi_F^2(^{11}\text{Li}, \text{set } 3)$  avec celle expérimentale (— · · — [19] et · · · · [20]).

$^{11}\text{Li}$  est que les données expérimentales données par différents auteurs [19, 20, 21] se contredisent et qu'il est donc difficile de faire le même type d'analyse que pour  $^{6}\text{He}$  dont la structure est actuellement plus connue. Il y a, cependant, un bon accord entre les différents ensembles de données quant à la position du maximum de l'amplitude de transition.

Comme ce à quoi nous nous attendions au vu des données expérimentales [19, 20, 21], les positions des pics pour les quatre fonctions d'onde initiales se situent entre 0.5 et 0.7 MeV. Une discussion similaire à celle concernant  $^{6}\text{He}$  peut être faite concernant leurs positions relatives. Nous constatons en effet que les énergies correspondant à  $\chi_F^1(^{11}\text{Li})$  et  $\chi_F^2(^{11}\text{Li}, \text{set } 1)$  sont plus petites que celles correspondant à  $\chi_F^2(^{11}\text{Li}, \text{set } 2)$  et  $\chi_F^2(^{11}\text{Li}, \text{set } 3)$  et que les deux premières fonctions d'onde ne tiennent pas compte des termes caractérisés par  $K = 2$ . Mais vu que, dans ce domaine d'énergie, l'état final dominant est celui pour lequel  $K = 1$ , la différence de structure des différentes fonctions d'onde a peu d'importance et l'écart d'énergie entre les différents maxima reste faible.

Une autre caractéristique importante à relever est la différence d'ordre de grandeur entre les amplitudes de transition pour  $\chi_F^2(^{11}\text{Li}, \text{set } 2)$  et  $\chi_F^2(^{11}\text{Li}, \text{set } 3)$ . L'explication doit être que la différence de signe entre les composantes  $(s_{1/2}^2)$  et  $(p_{1/2}^2)$  des deux fonctions d'onde mène à un changement de géométrie interne du système ce qui prouve que les signes des différents composantes de la fonction d'onde ont autant d'importance que leur poids.

	$r_c$
$\chi_F^1(^{11}\text{Li})$	0.60
$\chi_F^2(^{11}\text{Li}, \text{set 1})$	0.95
$\chi_F^2(^{11}\text{Li}, \text{set 2})$	0.80
$\chi_F^2(^{11}\text{Li}, \text{set 3})$	1.08

TAB. 6.4 – Estimations de la distance entre le coeur et le centre de masse de tout le système  $r_c$  pour les différentes fonctions d'onde  $\psi_F$  de  $^{11}\text{Li}$

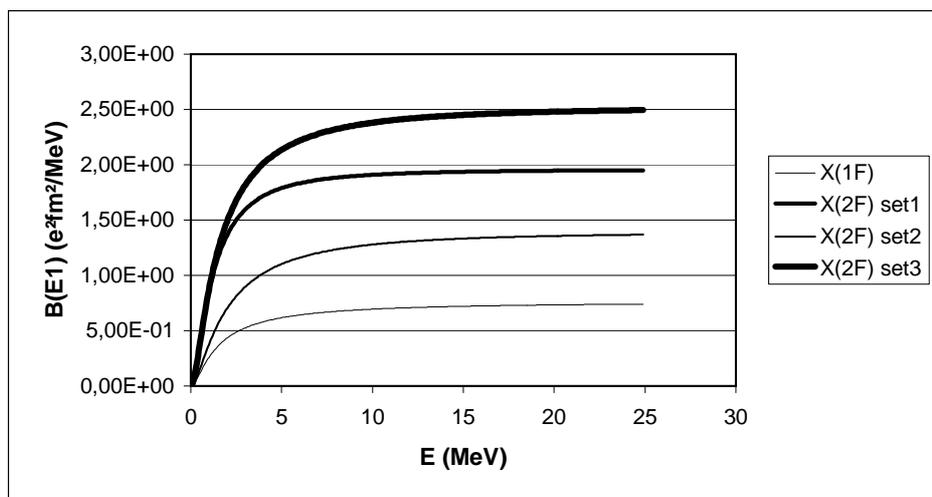


FIG. 6.6 – Amplitudes de transition intégrées sur  $E$  pour  $^{11}\text{Li}$ .

Une discussion similaire à celle faite dans le cas de  $^6\text{He}$  peut être faite concernant le rapport entre les différents ordres de grandeurs et les valeurs de la distance entre le coeur et le centre de masse de tout le système  $r_c$ . Ces valeurs sont résumées dans la table 6.4. Nous avons représenté les amplitudes de transition intégrées à la figure 6.6.

## 6.2 Fonctions hyperradiales réalistes $\chi_R(\rho)$

Nous cherchons à comparer les résultats numériques du calcul de l'amplitude de transition soit sur base des fonctions hyperradiales réalistes  $\chi_R(\rho)$  solutions du système d'équations différentielles (2.2.6) [6] soit sur base des fonctions  $\chi_F(\rho)$  qui sont définies par C. Forssén et al. (équation (5.2.4)). Pour le calcul de ces fonctions hyperradiales plus réalistes, nous n'avons pas négligé le potentiel comme c'était le

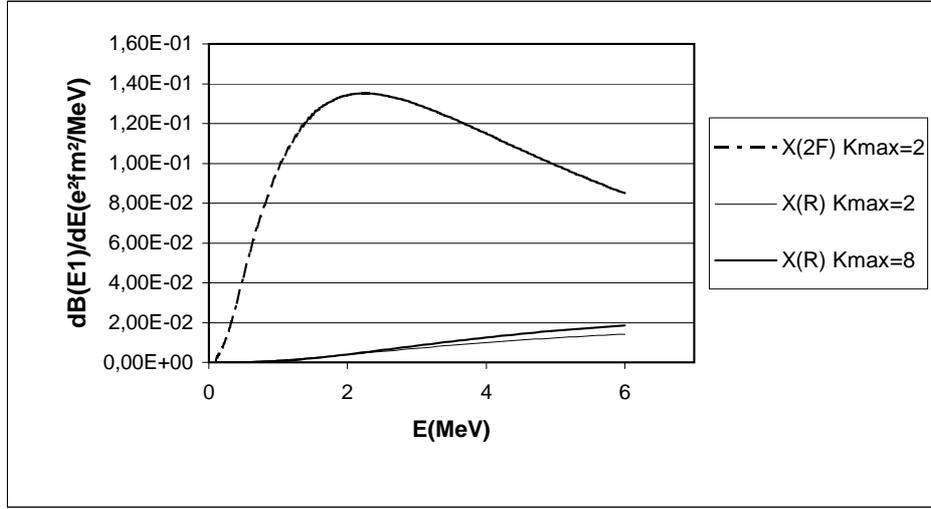


FIG. 6.7 – Amplitude de transition de l' ${}^6\text{He}$  pour  $\chi_F^{(2)}(\rho)$  et  $\chi_R(\rho)$  dans le cas où  $K_{max} = 2$  et pour  $\chi_R(\rho)$  dans le cas où  $K_{max} = 8$ .

cas pour les fonctions  $\chi_F(\rho)$ . Nous avons tenu compte d'un potentiel  $n - n$  et d'un potentiel  $\alpha - n$ .

Dans le but de cette comparaison, nous nous basons sur l'équation (4.2.4) dans laquelle l'élément de matrice hyperangulaire  $B_\alpha$  est donné par (4.4.8) et l'intégrale hyperradiale  $A_\rho$  (6.1.1) est effectuée numériquement. Cette équation a l'avantage d'être la même que les fonctions hyperradiales  $\chi_{K\gamma}^j(\rho)$  soient modélisées par  $\chi_F(\rho)$  ou  $\chi_R(\rho)$ . Nous savons, en effet, que l'intégrale sur  $\rho$  de  $A_\rho$  ne peut se faire analytiquement que pour les fonctions hyperradiales simplifiées  $\chi_R(\rho)$  (équation (C.0.6)).

Nous choisissons de comparer tous les résultats sur base de  $\chi_F^2(\rho)$  qui est la fonction hyperradiale simplifiée qui mène à l'amplitude de transition la plus réaliste. Les fonctions  $\chi_F^2(\rho)$  et  $\chi_R(\rho)$  ont déjà été comparées à la figure 5.2. Nous nous référons à la section 5.2 pour les commentaires faits à ce propos.

La figure 6.7 montre les résultats obtenus pour l'amplitude de transition de l' ${}^6\text{He}$  pour  $\chi_F^{(2)}(\rho)$  et  $\chi_R(\rho)$  dans le cas où  $K_{max} = 2$ , et pour  $\chi_R(\rho)$  dans le cas où  $K_{max} = 8$ .

Pour  $K_{max} = 2$ , nous obtenons une différence significative entre les deux ensembles de résultats. Le facteur  $10^{-2}$  par lequel sont multipliés les résultats obtenus avec  $\chi_R(\rho)$  par rapport à ceux obtenus avec  $\chi_F^{(2)}(\rho)$  peut s'expliquer à l'aide des graphiques 6.2 et 6.8.

Sur le premier, nous voyons en effet que la contribution principale à l'inté-

	$K$	$S$	$N_{(F,R)}$
$\chi_F^2(^6He, set 2)$	0	0	0.3005
$\chi_F^2(^6He, set 2)$	2	0	1.1996
$\chi_F^2(^6He, set 2)$	2	1	0.5184
$\chi_R(^6He)$	0	0	0.0649
$\chi_R(^6He)$	2	0	0.1599
$\chi_R(^6He)$	2	1	0.0466

TAB. 6.5 – Valeurs de la constante multiplicative  $N_{(F,R)}$  pour les différentes fonctions hyperradiales

grale hyperradiale provient de  $\chi_{K\gamma}^I(\rho)$  calculée pour des hyperrayons relativement importants (de l'ordre de 5 à 30 fm).

Sur le deuxième nous constatons que, pour ces valeurs de  $\rho$ , les courbes logarithmiques des fonctions hyperradiales  $\chi_F^{(2)}(\rho)$  et  $\chi_R(\rho)$  sont parallèles. Nous en déduisons que la dépendance en  $\rho$  est la même pour les deux types de fonctions hyperradiales dans ce domaine de valeurs de  $\rho$ .

$$\chi_{(F,R)} \rightarrow N_{(F,R)} e^{-\kappa\rho} \quad (6.2.1)$$

Nous avons calculé les différentes constantes  $N_F$  et  $N_R$  afin de justifier le facteur  $10^{-2}$  entre les deux types de résultats. Ils sont donnés dans la table 6.5. Le rapport entre les coefficients des fonctions hyperradiales de mêmes nombres quantiques  $\chi_R/\chi_F^2$  est plus ou moins égale à  $10^{-1}$ . Vu que nous tenons compte du carré de la norme des éléments de matrice dans l'expression de l'amplitude de transition  $\frac{dB(E1)}{dE}$  (5.1.2), le facteur  $10^{-2}$  est confirmé.

Le fait de considérer les contributions des éléments de matrice jusque  $K_{max} = 8$  augmente l'amplitude de transition obtenue sans toutefois changer son ordre de grandeur. Contrairement aux résultats obtenus sur base de  $\chi_F^2(^6He, set 2)$ , nous n'obtenons pas un bon accord avec l'expérience.

### 6.3 Numérisation de l'intégrale hyperradiale

Nous modélisons l'intégrale hyperradiale par l'une des méthodes qui permet d'approcher une intégrale définie. Nous choisissons la méthode des rectangles. Nous devons donc choisir un certain pas et une valeur de l'hyperrayon maximum

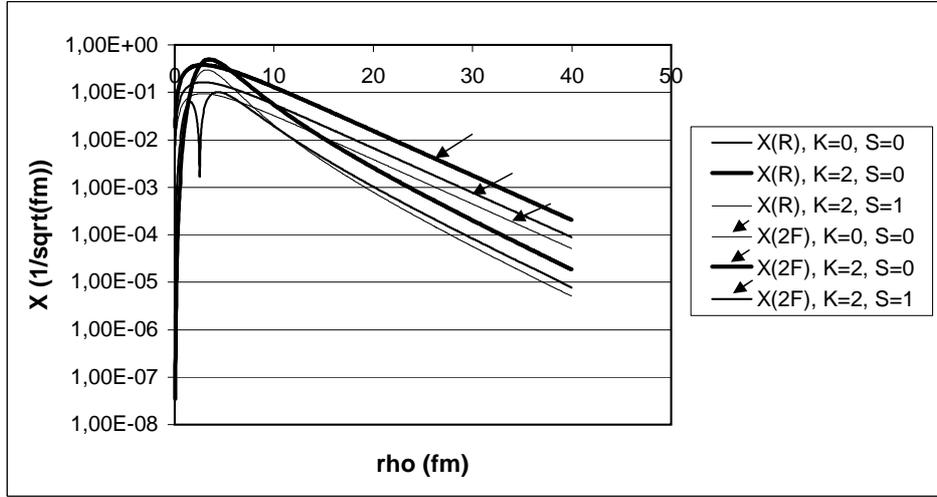


FIG. 6.8 – Graphique logarithmique de  $\chi_F^2(^6He, \text{set } 2)$  et  $\chi_R(\rho)$  pour les différentes valeurs de  $K_i$  et  $S_i$ .

afin d'estimer correctement l'intégrale sans avoir un calcul trop coûteux.

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \quad (6.3.1)$$

où  $(b-a)/n$  est défini comme étant le pas.

L'erreur commise en remplaçant l'aire sous la courbe  $f(x)$  par l'aire des rectangles est inférieure à l'aire d'un rectangle de hauteur  $|f(a) - f(b)|$  et de largeur  $b-a/n$ . Afin de minimiser cette erreur tout en limitant le nombre de termes de la somme (6.3.1), nous optons pour un pas de 0.05.

Nous devons à présent étudier l'erreur commise en passant d'une intégrale indéfinie à une intégrale définie. L'erreur commise est l'aire sous la courbe représentant  $f(x)$  entre  $b$  et  $l^\infty$ .

$$\text{erreur} = \int_b^\infty f(x) dx \quad (6.3.2)$$

Sur les graphes 6.2 et 6.9, nous avons représenté l'intégrand et l'intégrale hyperradiale en fonction de l'hyperrayon pour  $\chi_F^2(^6He, \text{set } 2)$  et  $\chi_R(\rho)$  et pour différentes valeurs de  $K', K$  et  $S$ . Nous constatons que l'intégrand tend vers zéro assez rapidement et que donc l'intégrale hyperradiale converge avant que  $\rho$  n'atteigne 50 fm. Nous prenons donc  $\rho_{max} = 50 \text{ fm}$ . Cette valeur est confirmée par le peu de différence entre les valeurs obtenues pour l'amplitude de transition pour différentes valeurs de  $\rho_{max}$ . A titre indicatif, quand nous passons de  $\rho_{max} = 50 \text{ fm}$  à

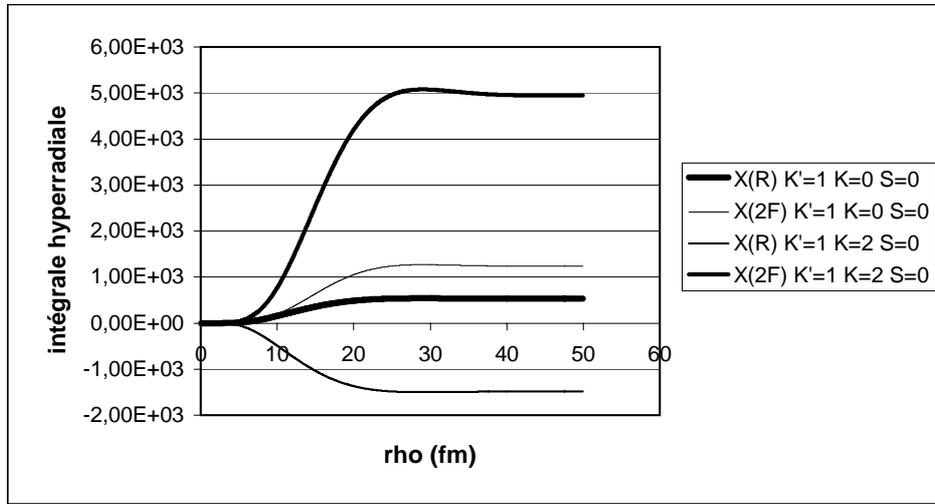


FIG. 6.9 – Intégrale hyperradiale en fonction de sa borne supérieure  $\rho$  pour  $\chi_F^2(^6He, \text{set } 2)$  et  $\chi_R(\rho)$  et pour différentes valeurs de  $K', K$  et  $S, E = 1$ .

$\rho_{max} = 100 \text{ fm}$ , la différence maximum entre les deux courbes est de  $5 \cdot 10^{-5}$  pour  $^6He$  et de  $2 \cdot 10^{-2}$  pour le  $^{11}Li$ .

## Chapitre 7

# Conclusions

La dissociation coulombienne est une des réactions qui permet de mieux connaître la structure et les caractéristiques des noyaux à halo. Dans le cadre de l'étude de cette réaction, nous nous sommes focalisés sur une des données qui permet de calculer le spectre de dissociation coulombienne, l'amplitude de transition  $\frac{dB(E1)}{dE}$  (équations (5.1.1) et (5.1.2)).

Dans un premier temps, nous avons développé une expression analytique de l'intégrale hyperangulaire  $B_\alpha$  (4.2.6) qui intervient dans l'expression de l'amplitude de transition. Pour ce calcul nous avons utilisé les propriétés des polynômes de Jacobi [9] ainsi que leurs relations d'orthogonalité.

Nous avons, ensuite, reproduit le modèle de C. Forssén et al. pour  ${}^6\text{He}$  et le  ${}^{11}\text{Li}$  [7, 12]. Cela consiste à utiliser des fonctions hyperradiales simplifiées qui vérifient le comportement asymptotique de l'état lié, ainsi que son comportement en zéro (équations (5.2.1) et (5.2.2)), ce qui permet de calculer analytiquement l'amplitude de transition. Nous obtenons les mêmes résultats que dans les articles [7] et [12].

Pour  ${}^6\text{He}$ , nous avons comparé cette première approximation à une seconde. Nous utilisons cette fois les fonctions  $\chi_R(\rho)$  solutions exactes du système d'équations (2.2.6) et déterminées en tenant compte des potentiels  $\alpha - n$  et  $n - n$  [6]. Ces fonctions sont plus réalistes que les premières. Cette deuxième approximation nécessite l'intégration numérique de la partie hyperradiale de l'élément de matrice intervenant dans (5.1.2).

Dans le but de comparer les deux approximations détaillées ci-dessus, nous avons considéré que l'état final est un système de trois corps sans interaction entre eux. L'état final est donc décrit par une combinaison d'ondes planes [7].

Nous constatons que l'amplitude de transition obtenue dans les deux cas diffère d'un facteur  $10^2$ . Ce qui est surprenant c'est que la première approximation mène à des résultats plus proches des résultats expérimentaux que la seconde. Cela

peut être dû au fait que l'utilisation d'ondes planes pour l'état final compense l'utilisation de fonctions hyperradiales simples pour l'état initial et que dans le cas des fonctions réalistes, les deux approximations ne se compensent plus.

Afin de confirmer ou d'infirmier cette hypothèse, un calcul de l'amplitude de transition devrait être fait sur base d'états finaux plus réalistes, calculés selon le même modèle que les fonctions  $\chi_R(\rho)$  c'est à dire en ne négligeant plus les potentiels.

## Annexe A

# Forme analytique des éléments de matrice

Dans cette annexe nous nous proposons d'exposer le calcul complet de la forme analytique de l'élément de matrice suivant :

$$\langle \Psi_{J'M'} | M_\mu^{(1)} | \Psi_{JM} \rangle \equiv \langle K' \gamma' J' M' | M_\mu^{(1)} | K \gamma JM \rangle \quad (\text{A.0.1})$$

En utilisant le théorème de Wigner-Eckart [10]

$$\langle \tau' J' M' | T_q^{(k)} | \tau JM \rangle = (JkMq | J' M') \langle \tau' J' || T^{(k)} || \tau J \rangle \quad (\text{A.0.2})$$

nous obtenons

$$\langle K' \gamma' J' M' | M_\mu^{(1)} | K \gamma JM \rangle = (J1M\mu | J' M') \langle K' \gamma' J' || M^{(1)} || K \gamma J \rangle \quad (\text{A.0.3})$$

avec  $M + \mu = M'$  et  $|J - 1| \leq J' \leq J + 1$ ,  $J + J' + 1$  entier d'après les règles de sélection des coefficients de Clebsh-Gordan. Sachant que l'état initial est un état  $J^\pi = 0^+$ , et donc  $M = 0$ , l'état final sera caractérisé par  $J = 1$  et  $M = \mu$ .

Sachant que  $\langle \Psi_{J'M'} |$  et  $|\Psi_{JM} \rangle$  se factorisent dans l'espace des états et l'espace des spins, que  $M_\mu^{(1)}$  n'agit que dans l'espace des états, nous pouvons utiliser un corollaire du théorème de Wigner-Eckart [10].

$$\begin{aligned} \langle \tau'_1 \tau'_2 J'_1 J'_2 J' | T^{(k)}(1) | \tau_1 \tau_2 J_1 J_2 J \rangle &= \delta_{\tau'_2 \tau_2} \delta_{J'_2 J_2} (-)^{J'_1 + J_2 + J + k} \\ &\times (2J'_1 + 1)^{1/2} (2J + 1)^{1/2} \left\{ \begin{matrix} J' & J'_1 & J_2 \\ J_1 & J & k \end{matrix} \right\} \langle \tau'_1 J'_1 || T^{(k)}(1) || \tau_1 J_1 \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.0.4})$$

Notre équation devient

$$\begin{aligned} \langle K'\gamma'J'M'|M_\mu^{(1)}|K\gamma JM \rangle &= (J1M\mu|J'M') \delta_{S'S} (-)^{L'+S+J+1} \\ &\times (2L'+1)^{1/2} (2J+1)^{1/2} \left\{ \begin{matrix} J' & L' & S \\ L & J & 1 \end{matrix} \right\} \langle l'_x l'_y K' L' || M^{(1)} || l_x l_y K L \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.0.5})$$

Utilisons à présent un deuxième corollaire du théorème de Wigner-Eckart. Si  $T_q^{(k)} \equiv O(1) \otimes U_q^{(k)}(2)$  et si  $|\tau JM \rangle = |\tau J \rangle \otimes |JM \rangle$  alors

$$\langle \tau' J' || T^{(k)} || \tau J \rangle = \langle \tau' J' | O(1) | \tau J \rangle \langle J' || U^{(k)}(2) || J \rangle \quad (\text{A.0.6})$$

Connaissant la définition de  $\langle \Psi_{J'M'} |$ , de  $|\Psi_{JM} \rangle$  et de  $M_\mu^{(1)}$ , nous avons

$$\begin{aligned} \langle K'\gamma'J'M'|M_\mu^{(1)}|K\gamma JM \rangle &= (J1M\mu|J'M') \delta_{S'S} (-)^{L'+S+J+1} \\ &\times (2L'+1)^{1/2} (2J+1)^{1/2} \left\{ \begin{matrix} J' & L' & S \\ L & J & 1 \end{matrix} \right\} \\ &\times \langle \chi_{K'\gamma}^{J'}(\rho) \rho^{-5/2} | \rho | \chi_{K\gamma}^J(\rho) \rho^{-5/2} \rangle \\ &\times \langle \Gamma_{K'L'}^{l'_x l'_y}(\Omega) || f^{(1)}(\Omega) || \Gamma_{KL}^{l_x l_y}(\Omega) \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.0.7})$$

où

$$\Gamma_{KL}^{l_x l_y}(\Omega) = \Phi_K^{l_x l_y}(\alpha) Y_{LM_L}^{l_x l_y}(\hat{x}, \hat{y}) \quad (\text{A.0.8})$$

$$f^{(1)}(\Omega) = eZ_C \sqrt{\frac{Z_C}{A(A-Z_C)}} \text{Sin}\alpha Y_{1\mu}(\hat{y}) \quad (\text{A.0.9})$$

Faisons appel une deuxième fois à ce théorème :

$$\begin{aligned} \langle \Gamma_{K'L'}^{l'_x l'_y}(\Omega) || f^{(1)}(\Omega) || \Gamma_{KL}^{l_x l_y}(\Omega) \rangle &= eZ_C \sqrt{\frac{Z_C}{A(A-Z_C)}} \\ &\times \langle \Phi_{K'}^{l'_x l'_y}(\alpha) | \text{Sin}\alpha | \Phi_K^{l_x l_y}(\alpha) \rangle \langle Y_{L'M_L'}^{l'_x l'_y}(\hat{x}, \hat{y}) || Y_{1\mu}(\hat{y}) || Y_{LM_L}^{l_x l_y}(\hat{x}, \hat{y}) \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.0.10})$$

Appliquons à nouveau le premier corollaire :

$$\begin{aligned} \langle Y_{L'M_L'}^{l'_x l'_y}(\hat{x}, \hat{y}) || Y_{1\mu}(\hat{y}) || Y_{LM_L}^{l_x l_y}(\hat{x}, \hat{y}) \rangle &= \delta_{l'_x l'_y} (-)^{l'_x + l'_y + L' + 1} (2l'_y + 1) (2L + 1) \\ &\times \left\{ \begin{matrix} L' & l'_y & l_x \\ l_y & L & 1 \end{matrix} \right\} \langle l'_y || Y_{1\mu}(\hat{y}) || l_y \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.0.11})$$

Sachant que  $J = M = 0$ ,  $J' = 1$ ,  $M' = \mu$  et que

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & J & 0 \end{Bmatrix} = \delta_{j_1 J} \delta_{j_2 j_3} \frac{(-1)^{j_1+j_2+j_3}}{\sqrt{(2j_1+1)(2j_2+1)}} \quad (\text{A.0.12})$$

$$\langle Y_{l_3} || Y_{l_1} || Y_{l_2} \rangle = (l_1 0 l_2 0 | l_3 0) \sqrt{\frac{(2l_1+1)(2l_2+1)}{4\pi(2l_3+1)}} \quad (\text{A.0.13})$$

nous obtenons finalement

$$\begin{aligned} \langle K' \gamma' 1 \mu | M_\mu^{(1)} | K \gamma 0 0 \rangle &= (0 1 0 \mu | 0 \mu) \delta_{S'S} (-)^{L'+S+1} (2L'+1)^{1/2} \\ &\times \begin{Bmatrix} 1 & L' & S \\ L & 0 & 1 \end{Bmatrix} \delta_{l_x l'_x} (-)^{l_x+l_y+L'+1} \langle \chi_{\lambda K' L' S' J'}^{l'_x l'_y}(\rho) \rho^{-5/2} | \rho | \chi_{\lambda K L S J}^{l_x l_y}(\rho) \rho^{-5/2} \rangle \\ &\times \langle \Psi_{K'}^{l'_x l'_y}(\alpha) | \text{Sin} \alpha | \Psi_K^{l_x l_y}(\alpha) \rangle (2l'_y+1)(2L+1) \begin{Bmatrix} L' & l'_y & l_x \\ l_y & L & 1 \end{Bmatrix} \\ &\times e Z_C \sqrt{\frac{Z_C}{A(A-Z_C)}} (1 0 l_y 0 | l'_y 0) \sqrt{\frac{3(2l_y+1)}{4\pi(2l'_y+1)}} \end{aligned} \quad (\text{A.0.14})$$

qui donne, après simplifications

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{J'M'} | M_\mu^{(1)} | \Psi_{JM} \rangle &= \delta_{S'S'} \delta_{l_x l'_x} \delta_{L'S} (-)^{L+l_x+l_y+1} (2L'+1)^{1/2} \begin{Bmatrix} L' & l'_y & l_x \\ l_y & L & 1 \end{Bmatrix} \\ &\times (1 0 l_y 0 | l'_y 0) \sqrt{\frac{2l_y+1}{4\pi}} A_\rho B_\alpha \end{aligned} \quad (\text{A.0.15})$$

où

$$A_\rho = \langle \chi_{K' \gamma'}^{l'_x l'_y}(\rho) \rho^{-5/2} | \rho | \chi_{K \gamma}^{l_x l_y}(\rho) \rho^{-5/2} \rangle \quad (\text{A.0.16})$$

$$B_\alpha = \langle \Phi_{K'}^{l'_x l'_y}(\alpha) | \text{Sin} \alpha | \Phi_K^{l_x l_y}(\alpha) \rangle \quad (\text{A.0.17})$$

## Annexe B

# Normalisation des Harmoniques Hypersphériques

Les harmoniques hypersphériques s'écrivent

$$\Gamma_K^{l_x l_y m_x m_y}(\Omega) = N_K^{l_x l_y} (\text{Cos}\alpha)^{l_x} (\text{Sin}\alpha)^{l_y} P_n^{l_y+1/2, l_x+1/2}(\text{Cos}2\alpha) Y_{l_x}^{m_x}(\hat{x}) Y_{l_y}^{m_y}(\hat{y}) \quad (\text{B.0.1})$$

$$N_K^{l_x l_y} = \left[ \frac{2n!(K+2)(n+l_x+l_y+1)!}{\Gamma(n+l_x+\frac{3}{2})\Gamma(n+l_y+\frac{3}{2})} \right]^{1/2} \quad (\text{B.0.2})$$

pour  $K$  entier positif ou nul,  $l_x$  et  $l_y$  entiers tels que  $n = (K - l_x - l_y) / 2$  soit un entier positif ou nul,  $m_x$  compris entre  $-l_x$  et  $l_x$  et  $m_y$  compris entre  $-l_y$  et  $l_y$ . Dans cette équation,  $N_K^{l_x l_y}$  est un facteur de normalisation,  $Y_l^m$  l'harmonique sphérique de moment cinétique  $l$  et de projection  $m$ ,  $\Gamma$  la fonction Gamma et  $P_n^{\alpha, \beta}$  le polynôme de Jacobi de degré  $n$  et de paramètre  $\alpha$  et  $\beta$ .

Sachant que

$$\int Y_{m'}^{l'}(\hat{x}) Y_m^l(\hat{x}) d\hat{x} = \delta_{l'l} \delta_{m'm} \quad (\text{B.0.3})$$

nous avons

$$\begin{aligned} \int \Gamma_{K'L'M_L}^{l'_x l'_y}(\Omega) \Gamma_{KLM_L}^{l_x l_y}(\Omega) d\Omega &= N_{K'}^{l'_x l'_y} N_K^{l_x l_y} \delta_{l'_y l_y} \delta_{l'_x l_x} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\text{Sin}\alpha)^{2l_y+2} (\text{Cos}\alpha)^{2l_x+2} \\ &\times P_{n'}^{l'_y+\frac{1}{2}, l'_x+\frac{1}{2}}(\text{Cos}2\alpha) P_n^{l_y+\frac{1}{2}, l_x+\frac{1}{2}}(\text{Cos}2\alpha) d\alpha \end{aligned} \quad (\text{B.0.4})$$

Posons  $\gamma = l_y + 1/2$ ,  $\beta = l_x + 1/2$  et  $x = \text{Cos}2\alpha$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \int \Gamma_{K'L'M_L}^{l'_x l'_y}(\Omega) \Gamma_{KLM_L}^{l_x l_y}(\Omega) d\Omega &= N_{K'}^{l'_x l'_y} N_K^{l_x l_y} \delta_{l'_y l_y} \delta_{l'_x l_x} \int_{-1}^1 (1-x)^\gamma (1+x)^\beta \\ &\times 2^{-(\gamma+\beta+2)} P_{n'}^{\gamma, \beta}(x) P_n^{\gamma, \beta}(x) dx \end{aligned} \quad (\text{B.0.5})$$

Nous pouvons à présent utiliser la relation d'orthogonalité des polynômes de Jacobi [9].

$$\int_{-1}^1 (1-x)^\gamma (1+x)^\beta 2^{-(\gamma+\beta+2)} P_n^{\gamma,\beta}(x) P_n^{\gamma,\beta}(x) dx = \delta_{n'n} h_n(\gamma, \beta) \quad (\text{B.0.6})$$

où

$$h_n(\gamma, \beta) = \frac{2^{\gamma+\beta+1}}{2n + \gamma + \beta + 1} \frac{\Gamma(n + \gamma + 1) \Gamma(n + \beta + 1)}{n! \Gamma(n + \gamma + \beta + 1)} \quad (\text{B.0.7})$$

avec  $\alpha, \beta > -1$ .

Nous obtenons donc

$$\int \Gamma_{K'L'M'_L}^{l'_x l'_y}(\Omega) \Gamma_{KLM_L}^{l_x l_y}(\Omega) d\Omega = N_K^{l'_x l'_y} N_K^{l_x l_y} \delta_{n'n} \delta_{l'_x l_x} \delta_{l'_y l_y} h_n(\gamma, \beta) 2^{-(\gamma+\beta+2)} \quad (\text{B.0.8})$$

Nous avons, à ce stade, démontré l'orthogonalité des harmoniques hypersphériques. Le fait qu'elles soient normées résulte de la relation

$$\left( N_K^{l'_x l'_y} \right)^2 h_n(\gamma, \beta) 2^{-(\gamma+\beta+2)} = 1 \quad (\text{B.0.9})$$

A l'aide de la relation B.0.7, nous en déduisons que

$$N_K^{l'_x l'_y} = \left( \frac{2n! (2n + \gamma + \beta + 1) \Gamma(n + \gamma + \beta + 1)}{\Gamma(n + \gamma + 1) \Gamma(n + \beta + 1)} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{B.0.10})$$

Cette expression est bien équivalente à B.0.2.

## Annexe C

# Calcul analytique de l'amplitude de transition

Nous calculons l'amplitude de transition 5.1.7 dans le cas où l'état initial est numérisé sur base de l'équation 5.2.3 et où l'état final est donné par 3.3.9.

$$\begin{aligned} \frac{dB(E1)}{dE} &= 12 \left( \frac{m_N}{\hbar^2} \right)^3 (eZ_c)^2 \frac{Z_c}{A(A-Z_c)} \sum_{K\gamma} E_f^2 \\ &\times | \langle \chi_{K'\gamma}^{J'}(\rho) \rho^{-5/2} | \rho | \chi_{K\gamma}^0(\rho) \rho^{-5/2} \rangle | \\ &\times \left| \left[ \Gamma_{K'L'M'_L}^{l_x l_y}(\Omega) \otimes \theta_S \right]_{J'M'} | \sin \alpha_c Y_{1\mu}(\hat{y}) | \left[ \Gamma_{KLM_L}^{l_x l_y}(\Omega) \otimes \theta_S \right]_{00} \right|^2 \end{aligned} \quad (C.0.1)$$

Dans ces conditions, l'élément de matrice qui intervient dans l'expression 5.1.7 est donné par

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{J'M'} | M_\mu^{(1)} | \Psi_{JM} \rangle &= \left\langle \frac{J_{K+2}(\kappa\rho)}{(\kappa\rho)^2} \left[ \Gamma_{KLM_L}^{l_x l_y}(\Omega) \otimes \theta_S \right]_{JM} | M_\mu^{(1)} \left| \frac{\chi_F^{(2)}(\rho)}{\rho^{5/2}} \right. \right. \\ &\times \left. \left[ [\sqrt{w_{00}} \Gamma_{000}^{00}(\Omega) + \sqrt{w_{20}} \Gamma_{200}^{00}(\Omega)] \theta_{00} + \sqrt{w_{21}} [\Gamma_{21}^{11}(\Omega) \otimes \theta_1]_{J=0} \right] \right\rangle \end{aligned} \quad (C.0.2)$$

dans lequel  $\chi^{(2)}$  est donné par l'équation 5.2.2 et la définition de l'opérateur multipolaire électrique par 4.1.4.

En séparant la partie hyperradiale de la partie hyperangulaire

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{J'M'} | M_\mu^{(1)} | \Psi_{JM} \rangle &= eZ_c \sqrt{\frac{Z_c}{A(A-Z_c)}} \left\langle \frac{J_{K+2}(\kappa\rho)}{(\kappa\rho)^2} | \rho | \frac{\chi_F^{(2)}(\rho)}{\rho^{5/2}} \right\rangle \\ &\times \left[ \sqrt{w_{00}} \langle Kl_x l_y LS | \sin \alpha_c Y_{1\mu}(\hat{y}) | 00000 \rangle \right. \\ &+ \sqrt{w_{20}} \langle Kl_x l_y LS | \sin \alpha_c Y_{1\mu}(\hat{y}) | 20000 \rangle \\ &+ \left. \sqrt{w_{21}} \langle Kl_x l_y LS | \sin \alpha_c Y_{1\mu}(\hat{y}) | 21111 \rangle \right] \end{aligned} \quad (C.0.3)$$

et en considérant la définition de  $\chi_F^{(2)}$  5.2.2, nous obtenons finalement

$$\begin{aligned}
\langle \Psi_{J'M'} | M_\mu^{(1)} | \Psi_{JM} \rangle &= eZ_c \sqrt{\frac{Z_c}{A(A-Z_c)}} \sqrt{\frac{2\kappa_0\kappa_1(\kappa_0+\kappa_1)}{(\kappa_0-\kappa_1)^2}} \\
&\times \left[ \sum_1^{i=0} (-1)^i \left\langle \frac{J_{K+2}(\kappa\rho)}{(\kappa\rho)^2} |\rho| \frac{\exp(-\kappa_i\rho)}{\rho^{5/2}} \right\rangle \right] \\
&\times [\sqrt{w_{00}} \langle Kl_x l_y LS | \sin \alpha_c Y_{1\mu}(\hat{y}) | 00000 \rangle \\
&+ \sqrt{w_{20}} \langle Kl_x l_y LS | \sin \alpha_c Y_{1\mu}(\hat{y}) | 20000 \rangle \\
&+ \sqrt{w_{21}} \langle Kl_x l_y LS | \sin \alpha_c Y_{1\mu}(\hat{y}) | 21111 \rangle]
\end{aligned} \tag{C.0.4}$$

L'élément de matrice hyperradiale peut s'exprimer sous forme d'intégrale de la manière suivante :

$$\left\langle \frac{J_{K+2}(\kappa\rho)}{(\kappa\rho)^2} |\rho| \frac{\exp(-\kappa_i\rho)}{\rho^{5/2}} \right\rangle = \kappa^{-\frac{9}{2}} \int_0^\infty J_{K+2}(z) e^{-\frac{\kappa_i}{\kappa}z} (z)^{\frac{3}{2}} dz \tag{C.0.5}$$

où  $z = \kappa\rho$ .

D'après les propriétés des fonctions de Bessel [17], ce type d'intégrale peut s'exprimer en fonction des fonction hypergéométriques.

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty J_\nu(\beta x) e^{-\alpha x} x^{\mu-1} dx &= \frac{\left(\frac{\beta}{2}\right)^\nu \Gamma(\nu+\mu)}{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)^{\nu+\mu}} \Gamma(\nu+1)} \\
&\times F\left(\frac{\nu+\mu}{2}; \frac{1-\mu+\nu}{2}; \nu+1; \frac{\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\right)
\end{aligned} \tag{C.0.6}$$

En posant  $\nu = K+2$ ,  $\beta = 1$ ,  $\alpha = \kappa_i/\kappa$  et  $\mu = 5/2$  nous obtenons l'expression de l'intégrale C.0.5.

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{J_{K+2}(\kappa\rho)}{(\kappa\rho)^2} |\rho| \frac{\exp(-\kappa_i\rho)}{\rho^{5/2}} \right\rangle &= \kappa^{-\frac{9}{2}} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{K+2} \Gamma\left(K+\frac{9}{2}\right)}{\left(\frac{\kappa_i^2+\kappa^2}{\kappa^2}\right)^{\frac{K}{2}+\frac{9}{4}} \Gamma(K+3)} \\
&\times F\left(\frac{K}{2}+\frac{9}{4}; \frac{K}{2}+\frac{1}{4}; K+3; \frac{\kappa^2}{\kappa_i^2+\kappa^2}\right)
\end{aligned} \tag{C.0.7}$$

Nous pouvons à présent exprimer l'amplitude de transition en tenant compte

des équations C.0.4 et C.0.7.

$$\begin{aligned}
\frac{dB(E1)}{dE} &= 12 \left( \frac{m_N}{\hbar^2} \right)^3 (eZ_c)^2 \frac{Z_c}{A(A-Z_c)} c^2 \sum_{Kl_x l_y LSJM} E_f^2 \kappa^{-9} \\
&\times \left[ \sum_1^{i=0} \sum_1^{j=0} (-1)^{i+j} \left( \frac{\Gamma(K + \frac{9}{2})}{2^{K+2} \Gamma(K+3)} \right)^2 \right. \\
&\times (y_i)^{\frac{K}{2} + \frac{9}{4}} F\left(\frac{K}{2} + \frac{9}{4}; \frac{K}{2} + \frac{1}{4}; K+3; y_i\right) \\
&\times (y_j)^{\frac{K}{2} + \frac{9}{4}} F\left(\frac{K}{2} + \frac{9}{4}; \frac{K}{2} + \frac{1}{4}; K+3; y_j\right) \\
&\times [\sqrt{w_{00}} \langle Kl_x l_y LS | \sin \alpha_c Y_{1\mu}(\hat{y}) | 00000 \rangle > \\
&+ \sqrt{w_{20}} \langle Kl_x l_y LS | \sin \alpha_c Y_{1\mu}(\hat{y}) | 20000 \rangle > \\
&+ \sqrt{w_{21}} \langle Kl_x l_y LS | \sin \alpha_c Y_{1\mu}(\hat{y}) | 21111 \rangle >]^2
\end{aligned} \tag{C.0.8}$$

avec  $E = \frac{(\hbar\kappa)^2}{2m_N}$  et  $y_i = \frac{\kappa^2}{\kappa_i^2 + \kappa^2}$ .

Rappelons que, d'après 4.3.8, les valeurs de  $K$  possibles sont  $K = 1, 3$ . Nous obtenons l'expression suivante pour l'amplitude de transition :

$$\begin{aligned}
\frac{dB(E1)}{dE} &= 2Dc^2 E^{-5/2} \\
&\times \left[ \sum_1^{i,j=0} (-1)^{i+j} \left( \frac{\Gamma^2(\frac{11}{2})}{2^6 \Gamma^2(4)} \frac{E^{\frac{11}{2}} F_1(y_i) F_1(y_j)}{[(E_i + E)(E_j + E)]^{11/4}} \right) \right. \\
&\times (w_{00} \langle 10110 | \sin \alpha_c Y_{1\mu}(\hat{y}) | 00000 \rangle >^2 \\
&+ 2\sqrt{w_{00}w_{20}} \langle 10110 | \sin \alpha_c Y_{1\mu}(\hat{y}) | 00000 \rangle > \\
&\times \langle 10110 | \sin \alpha_c Y_{1\mu}(\hat{y}) | 20000 \rangle > \\
&+ w_{21} \langle 11011 | \sin \alpha_c Y_{1\mu}(\hat{y}) | 21111 \rangle >^2 \\
&+ (-1)^{i+j} \left( \frac{\Gamma^2(\frac{15}{2})}{2^{10} \Gamma^2(6)} \frac{E^{\frac{11}{2}} F_2(y_i) F_2(y_j)}{[(E_i + E)(E_j + E)]^{11/4}} \right) \\
&\times (w_{20} \langle 30110 | \sin \alpha_c Y_{1\mu}(\hat{y}) | 20000 \rangle >^2 \\
&+ w_{21} \langle 31011 | \sin \alpha_c Y_{1\mu}(\hat{y}) | 21111 \rangle >^2 \\
&+ w_{21} \langle 31211 | \sin \alpha_c Y_{1\mu}(\hat{y}) | 21111 \rangle >^2 \\
&+ w_{21} \langle 31221 | \sin \alpha_c Y_{1\mu}(\hat{y}) | 21111 \rangle >^2]
\end{aligned} \tag{C.0.9}$$

en posant

$$F_1(y_i) = F\left(\frac{11}{4}; \frac{3}{4}; 4; y_i\right) \tag{C.0.10}$$

si  $K = 1$  et

$$F_2(y_i) = y_i F\left(\frac{15}{4}; \frac{7}{4}; 6; y_i\right) \tag{C.0.11}$$

si  $K = 3$ , avec

$$D = \frac{3}{2} \frac{(eZ_c)^2}{A(A - Z_c)} \left( \frac{\hbar^2}{2m} \right)^{3/2} E^{-5/2} \quad (\text{C.0.12})$$

comme dans les articles [7, 12] et en tenant compte du fait que le produit de deux éléments de matrice dont les  $S$  sont différents est nul ( $S = S$ ).

Et finalement

$$\begin{aligned} \frac{dB(E1)}{dE} &= 2Dc^2 E^3 \sum_1^{i,j=0} (-1)^{i+j} \\ &\times \frac{\alpha_1 F_1(y_i) F_1(y_j) + \alpha_2 F_2(y_i) F_2(y_j)}{[(E_i + E)(E_j + E)]^{11/4}} \end{aligned} \quad (\text{C.0.13})$$

avec

$$\alpha_1 = \frac{1}{8} \left( \frac{315}{2^{10}} \right)^2 (1 + 3w_{00} + 4\sqrt{w_{00}w_{20}}) \quad (\text{C.0.14})$$

$$\alpha_2 = \frac{3}{2} \left( \frac{9009}{2^{17}} \right)^2 (w_{20} + w_{21}) \quad (\text{C.0.15})$$

Pour le calcul de ces coefficients, nous avons tenu compte des valeurs des éléments de matrice trouvées à la section 4.6.

# Bibliographie

- [1] P. G. Hansen, A. S. Jensen, B. Jonson : Nuclear Halos, *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.* 45, 591, 1995
- [2] B. V. Danilin, I. J. Thompson, J. S. Vaagen et M. V. Zhukov, Three-body continuum structure and response functions of halo nuclei (I) :  ${}^6\text{He}$ , *Nucl. Phys. A* 632 (1998) 383-416
- [3] A. Cobis, D. V. Fedorov et A. S. Jensen, Three-body halos. V. Computations of continuum spectra for borromean nuclei, *Phys. Rev. C* 58 (1998) 1403
- [4] I. J. Thompson, B. V. Danilin, V. D. Efros, M. V. Zhukov et J. S. Vaagen, Structure and continuum response of halo nuclei, *J. Phys. G* 24 (1998) 1505-1512
- [5] C. Daniel : Etude de noyaux à halo par la méthode des coordonnées hypersphériques, Travail de Fin d'Etudes, ULB, Faculté des Sciences Appliquées, 2000-01
- [6] P. Descouvemont, C. Daniel, D. Baye : Three-body systems with Lagrange-mesh techniques in hyperspherical coordinates, *Phys. Rev. C* 67, 044309 (2003)
- [7] C. Forssén, V. D. Efros, M. V. Zhukov : Analytical E1 strength functions of two-neutron halo nuclei :  ${}^6\text{He}$  example, *Nucl. Phys. A* 697 (2002) 639-654
- [8] D. Baye : Mécanique Quantique, Première partie : Notions de base, Notes de cours, Presses Universitaires de Bruxelles, 1998
- [9] M. C. Abramovitch et I. A. Stegun : Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, Dover Publication Inc., New-York, 1964
- [10] D. Baye : Mécanique Quantique, Deuxième partie : Symétries et Invariances, Notes de cours, Presses Universitaires de Bruxelles, 1999
- [11] C. Forssén, B. Jonson, M. V. Zhukov : A correlated background in invariant mass spectra of three-body systems, *Nucl. Phys. A* 673 (2000) 143-156
- [12] C. Forssén, V. D. Efros, M. V. Zhukov : Analytical E1 strength functions of two-neutron halo nuclei :  ${}^{11}\text{Li}$  and  ${}^{14}\text{Be}$ , *Nucl. Phys. A* 706 (2002) 48-60
- [13] D. Baye : Eléments de Physique Nucléaire, Notes de cours, Presses Universitaires de Bruxelles, 1999

- [14] D. A. Varshalovitch, A. N. Moskalev, V. K. Kersonskii : Quantum Theory of Angular Momentum, World Scientific, Singapore, 1989
- [15] A. Winther et K. Alder, Relativistic Coulomb excitation, Nucl. Phys. A 319 (1979) 518-532
- [16] C. A. Bertulani et G. Baur, Relativistic Coulomb collisions and the virtual radiation spectrum, Nucl. Phys. A 442 (1985) 739-752
- [17] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik : Table of Integrals, Series and Products, Academic Press, San Diego, 1980, second edition.
- [18] T. Aumann et al., Continuum excitations in  ${}^6\text{He}$ , Phys. Rev. C 59 (1999) 1252
- [19] M. Zinser et al., Invariant-mass spectroscopy of  ${}^{10}\text{Li}$  and  ${}^{11}\text{Li}$ , Nucl. Phys. A 619 (1997) 151-176
- [20] D. Sackett et al., Electromagnetic excitation of  ${}^{11}\text{Li}$ , Phys. Rev. C 48 (1993) 118
- [21] S. Shimoura et al., Coulomb dissociation reaction and correlations of two halo neutrons in  ${}^{11}\text{Li}$ , Phys. Lett. B 348 (1995) 29-34

# Table des figures

5.1	Comparaison entre les fonctions hyperradiales $\chi_F^{(1)}(\rho)$ (équation (5.2.1)) et $\chi_F^{(2)}(\rho)$ (équation (5.2.2)) pour l' ${}^6\text{He}$ et le ${}^{11}\text{Li}$ . . . . .	28
5.2	Comparaison des fonctions $\chi_F^2(\rho)$ et $\chi_R(\rho)$ pour l' ${}^6\text{He}$ et pour $K_{max} = 2$ . . . . .	30
6.1	Comparaison de l'amplitude de transition $\frac{dB(E1)}{dE}$ calculée sur base de $\chi_F^1({}^6\text{He})$ , $\chi_F^2({}^6\text{He}, \text{set } 1)$ et $\chi_F^2({}^6\text{He}, \text{set } 2)$ avec les données expérimentales de T. Aumann et al. [18]. . . . .	35
6.2	Comparaison entre les intégrands de l'intégrale hyperradiale (6.1.1) pour $\chi_F^{(2)}(\rho)$ et $\chi_F(\rho)$ , $E = 1$ . . . . .	36
6.3	Intégrand de l'intégrale hyperradiale $A_p$ (6.1.1) en fonction de l'énergie $E$ et de l'hyperrayon $\rho$ pour $\chi_F^2(\rho)$ . . . . .	37
6.4	Amplitudes de transition intégrées sur $E$ pour l' ${}^6\text{He}$ . . . . .	38
6.5	Comparaison de l'amplitude de transition $\frac{dB(E1)}{dE}$ calculée sur base de $\chi_F^1({}^{11}\text{Li})$ , $\chi_F^2({}^{11}\text{Li}, \text{set } 1)$ , $\chi_F^2({}^{11}\text{Li}, \text{set } 2)$ et $\chi_F^2({}^{11}\text{Li}, \text{set } 3)$ avec celle expérimentale (— · — [19] et · · · [20]). . . . .	39
6.6	Amplitudes de transition intégrées sur $E$ pour l' ${}^{11}\text{Li}$ . . . . .	40
6.7	Amplitude de transition de l' ${}^6\text{He}$ pour $\chi_F^{(2)}(\rho)$ et $\chi_R(\rho)$ dans le cas où $K_{max} = 2$ et pour $\chi_R(\rho)$ dans le cas où $K_{max} = 8$ . . . . .	41
6.8	Graphique logarithmique de $\chi_F^2({}^6\text{He}, \text{set } 2)$ et $\chi_R(\rho)$ pour les différentes valeurs de $K_i$ et $S_i$ . . . . .	43
6.9	Intégrale hyperradiale en fonction de sa borne supérieure $\rho$ pour $\chi_F^2({}^6\text{He}, \text{set } 2)$ et $\chi_R(\rho)$ et pour différentes valeurs de $K', K$ et $S$ , $E = 1$ . . . . .	44

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Equation de Schrödinger en coordonnées hypersphériques</b>	<b>5</b>
2.1	Définition des coordonnées hypersphériques . . . . .	5
2.1.1	Les coordonnées de Jacobi . . . . .	5
2.1.2	Les coordonnées hypersphériques . . . . .	6
2.2	Equation de Schrödinger . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Description du noyau</b>	<b>10</b>
3.1	Comportement à l'origine de la fonction d'onde . . . . .	10
3.2	Comportement asymptotique de la fonction d'onde . . . . .	11
3.2.1	Etat lié . . . . .	11
3.2.2	Etat libre . . . . .	12
3.3	Fonction d'onde du système . . . . .	13
3.3.1	Description de l'état lié . . . . .	14
3.3.2	Choix de l'état final . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Calcul des éléments de matrice</b>	<b>16</b>
4.1	Opérateur multipolaire électrique . . . . .	16
4.2	Forme analytique des éléments de matrice . . . . .	17
4.3	Règles de sélection appliquées aux éléments de matrice . . . . .	18
4.4	Développement analytique de l'élément de matrice hyperangulaire $B_\alpha$ . . . . .	19
4.5	Problèmes de conventions . . . . .	21
4.6	Calcul numérique . . . . .	23
<b>5</b>	<b>L'amplitude de transition pour des noyaux à halo de deux neutrons</b>	<b>25</b>
5.1	Définition générale de l'amplitude de transition . . . . .	25
5.2	Approximations pour l'état initial . . . . .	26
5.2.1	Fonctions hyperradiales . . . . .	27
5.2.2	Fonctions d'onde partielles . . . . .	29
5.3	Calcul analytique de l'amplitude de transition . . . . .	31

<b>6</b>	<b>Résultats numériques pour l'amplitude de transition</b>	<b>34</b>
6.1	Fonctions hyperradiales simplifiées $\chi_F(\rho)$ . . . . .	34
6.2	Fonctions hyperradiales réalistes $\chi_R(\rho)$ . . . . .	40
6.3	Numérisation de l'intégrale hyperradiale . . . . .	42
<b>7</b>	<b>Conclusions</b>	<b>45</b>
<b>A</b>	<b>Forme analytique des éléments de matrice</b>	<b>47</b>
<b>B</b>	<b>Normalisation des Harmoniques Hypersphériques</b>	<b>50</b>
<b>C</b>	<b>Calcul analytique de l'amplitude de transition</b>	<b>52</b>