

Étude de la réaction de capture proton-proton à
l'énergie d'intérêt astrophysique

par Florence

Table des matières

1	Introduction	2
2	La réaction proton-proton en astrophysique	3
2.1	Introduction	3
2.2	Énergies d'intérêt astrophysique	4
3	Méthodes de calculs	8
3.1	Méthode de Numerov	8
4	L'interaction nucléon-nucléon	10
4.1	Introduction	10
4.2	Le deuton	13
4.3	L'état libre	14
4.4	Les potentiels nucléaires	15
4.4.1	Le potentiel du Minnesota	15
4.4.2	Le potentiel de Reid (soft core)	16
4.4.3	Le potentiel Argonne v14	16
4.4.4	Le potentiel Urbana v14	17
4.5	Comparaison des forces	19
5	Calcul du $\Lambda^2(E)$	20
5.1	Introduction	20
5.2	Ordre zéro	22
5.3	Premier ordre	23
5.4	Deuxième ordre	25
5.5	Ordres supérieurs	26
6	Résultats	27
A	Calculs d'éléments de matrice	28
A.1	Théorème de Wigner-Eckart	28
A.2	Produit scalaire de deux opérateurs tensoriels	28
A.3	Calculs d'éléments de matrice	28
A.4	Symboles 3-j et 6-j	29

Chapitre 1

Introduction

Chapitre 2

La réaction proton-proton en astrophysique

2.1 Introduction

Historiquement, on a commencé par imaginer que l'énergie nécessaire à la luminosité des étoiles provenait de réactions chimiques au sein du Soleil. Au milieu du XIX^{ème} siècle, Kelvin et Helmholtz émirent l'hypothèse que le rayonnement du Soleil venait de son effondrement gravitationnel provoquant l'échauffement du gaz inerte. Ce n'est que dans les années 1920 que Eddington avança l'idée que les réactions thermonucléaires étaient la source de production d'énergie dans les étoiles. Une étoile étoile étant principalement constituée d'hydrogène, c'est la fusion de quatre hydrogènes en hélium qui va constituer la source d'énergie, au moins tant que l'étoile est sur la séquence principale. En 1938, Bethe proposa deux schémas de réactions qui permettent d'expliquer la transformation de l'hydrogène en hélium et l'origine de l'énergie nécessaire à la luminosité des étoiles pour la plus grande partie de leur vie. Ces deux réactions de fusion nucléaires sont la chaîne pp (proton-proton) et le cycle CNO (carbone-azote-oxygène). La chaîne pp sera largement prédominante pour les étoiles de faible masse. Pour les étoiles au-delà de 1,3 masses solaires, c'est le cycle CNO qui fournit la plus grande part de l'énergie de l'étoile.

Le schéma de la chaîne pp est donné à la figure 2.1. La première étape, la capture p-p, impliquant la fusion de deux protons en un deuton avec émission d'un positon et d'un neutrino est un processus faible. C'est l'étape la plus lente de la chaîne pp, elle gouverne donc le taux global de la réaction. Elle est tellement faible qu'elle ne peut pas être étudiée en laboratoire.

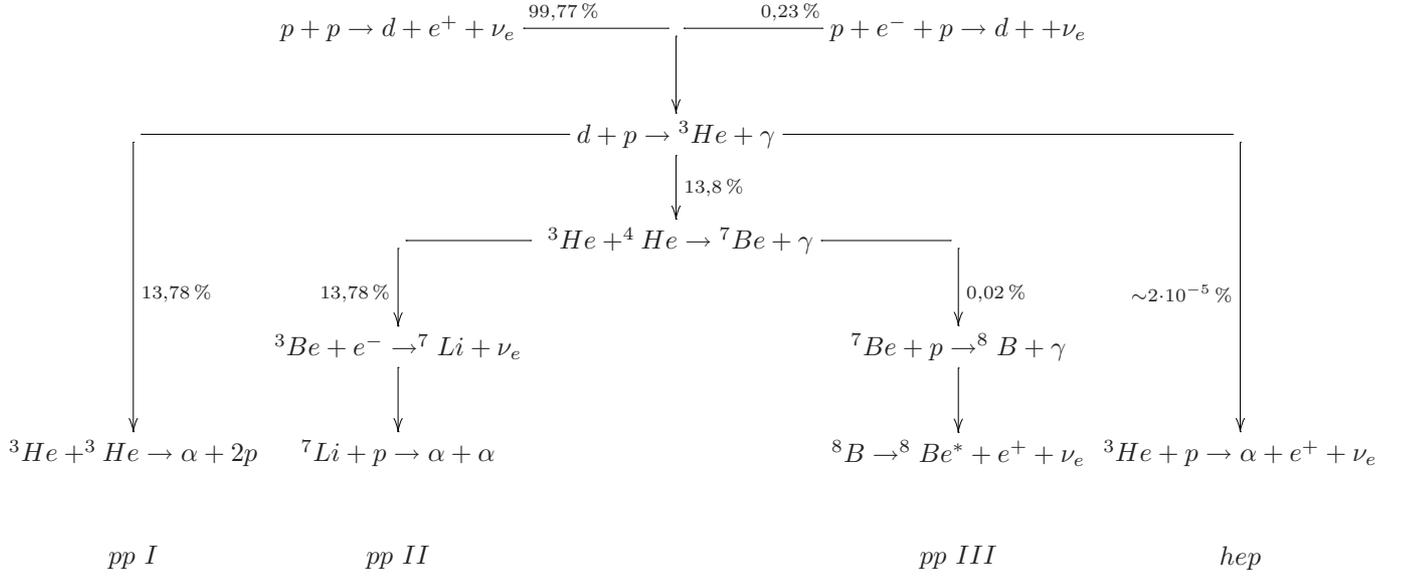


FIG. 2.1 – Chaîne pp

2.2 Énergies d'intérêt astrophysique

Nous allons dans cette section évaluer l'énergie à laquelle la section efficace doit être calculée pour obtenir le taux de réaction d'une réaction nucléaire.

Considérons une réaction entre deux nucléides de masse M_1 et M_2 et de charge Z_1e et Z_2e respectivement. Si nous supposons que l'étoile est à l'équilibre thermodynamique local, les vitesses des constituants suivent une distribution de Maxwell-Boltzmann :

$$\phi(v)d^3v = \left(\frac{\mu}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\mu v^2}{2k_B T}\right) 4\pi v^2 dv \quad (2.1)$$

où $\mu = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}$ est la masse réduite du système et k_B la constante de Boltzmann. Nous pouvons définir le taux de réaction par :

$$r = \frac{N_1 N_2}{1 + \delta_{12}} \langle \sigma v \rangle \quad (2.2)$$

où N_1 , N_2 sont les densités de particules et $\langle \sigma v \rangle$ est la vitesse de réaction entre paires de particules qui est définie comme :

$$\langle \sigma v \rangle = \left(\frac{8}{\pi \mu}\right)^{1/2} (k_B T)^{-3/2} \int E \exp\left(-\frac{E}{k_B T}\right) \sigma(E) dE \quad (2.3)$$

où $\sigma(E)$ est la section efficace et E l'énergie dans le centre de masse du système. Le taux de production d'énergie associée est :

$$\epsilon = rQ \quad (2.4)$$

où Q est l'énergie libérée par la réaction.

À basse énergie, on peut exprimer la section efficace comme

$$\sigma(E) \sim \frac{P(E)}{E} \quad (2.5)$$

où $P(E)$ est le facteur de pénétration coulombienne,

$$P(E) = C \exp(-2\pi\eta) \quad (2.6)$$

où C est une constante et η est le paramètre de Sommerfeld

$$\eta = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v} \quad (2.7)$$

et v est la vitesse relative des deux nucléides. Afin d'éliminer la partie dominante de la dépendance en énergie de la section efficace, nous définissons le facteur astrophysique comme :

$$S(E) = E \exp(2\pi\eta)\sigma(E) \quad (2.8)$$

Le facteur astrophysique contient tous les effets nucléaires. Dans le cas d'une réaction non résonnante, il varie lentement avec l'énergie et possède un développement de Taylor autour de $E = 0$. À l'ordre zéro, l'équation (2.3) devient :

$$\langle \sigma v \rangle \approx \left(\frac{8}{\pi\mu} \right)^{1/2} (kT)^{-3/2} S(0) \int \exp \left(-\frac{E}{k_B T} - \sqrt{\frac{E_G}{E}} \right) dE \quad (2.9)$$

où E_G est l'énergie de Gamov définie par :

$$E_G = 2\mu \left(\frac{\pi Z_1 Z_2 e^2}{\hbar} \right)^2 \quad (2.10)$$

La dépendance en énergie de l'intégrand est donnée par le produit de la distribution de Maxwell-Boltzmann et du facteur de pénétration de la barrière coulombienne qui donne un pic centré en E_0 et d'une largeur Δ_0 de forme approximativement gaussienne. Il a été représenté à la figure 2.2 dans le cas de la capture p-p.

Si le pic de Gamov est approché par une gaussienne,

$$\exp \left(-\frac{E}{k_B T} - \sqrt{\frac{E_G}{E}} \right) \approx I_{MAX} \exp \left[-\left(\frac{E - E_0}{\Delta_0/2} \right)^2 \right] \quad (2.11)$$

avec

$$E_0 = \left(\sqrt{E_G k_B T} / 2 \right)^{2/3} \approx 0,122 (Z_1^2 Z_2^2 A T_9^2)^{1/3} \text{ MeV} \quad (2.12)$$

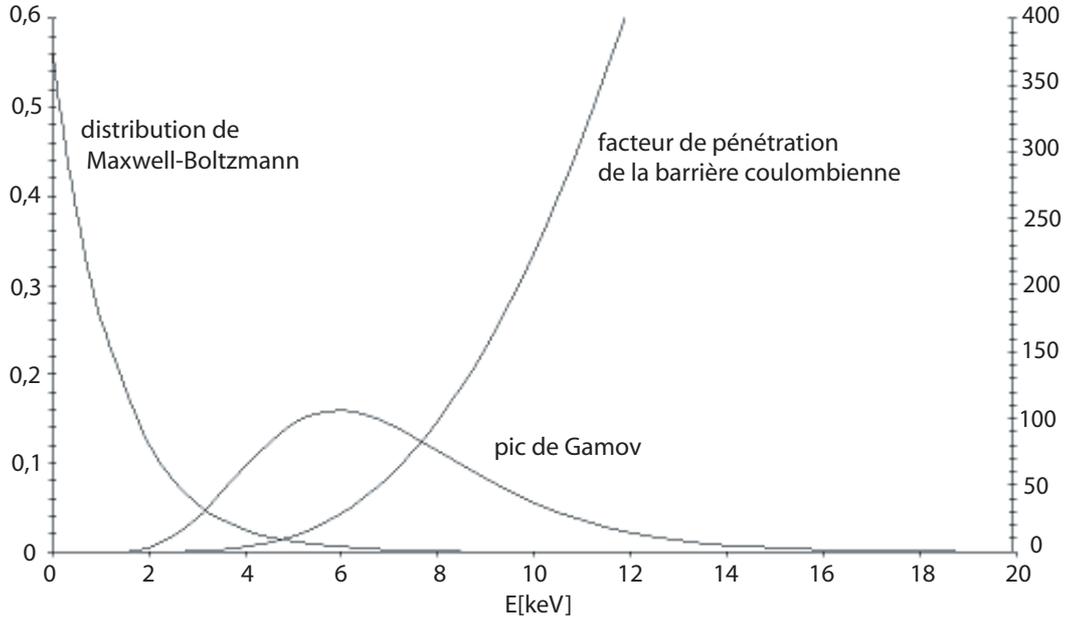


FIG. 2.2 – Pic de Gamov (normalisé de façon à obtenir une aire unité)

où T_9 est la température exprimée en milliards de kelvin et la largeur à hauteur $1/e$ du pic de Gamov est donnée par :

$$\Delta_0 = \frac{4}{\sqrt{3}}(E_0 k_B T)^{1/2} \approx 0,237(Z_1^2 Z_2^2 A T_9^5)^{1/6} \text{ MeV} \quad (2.13)$$

La valeur I_{MAX} de l'intégrand est donnée par :

$$I_{MAX} = \exp\left(-3\frac{E_0}{k_B T}\right) \approx \exp\left(-42,46 Z_1^2 Z_2^2 A \frac{1}{T_6}\right)^{1/3} \quad (2.14)$$

où T_6 est la température exprimée en millions de kelvin.

Le domaine d'énergie $\Delta E = E_0 \pm \frac{1}{2}\Delta_0$ est celui pour lequel la contribution à l'intégrale apparaissant dans (2.9) est la plus importante. C'est le domaine d'énergie d'intérêt astrophysique.

Dans le tableau suivant, nous avons repris les valeurs de E_0 et de Δ_0 pour différentes réactions et pour une température de $15 \cdot 10^6$ K (température proche de celle du centre du soleil).

réactions :	E_0 [keV]	Δ_0 [keV]
$p + p$	5,9	6,4
$p + {}^{14}\text{N}$	26,0	13,4
$\alpha + {}^{12}\text{C}$	44,5	17,5
${}^{16}\text{O} + {}^{16}\text{O}$	47,1	18,0

Pour la réaction de capture p-p, nous obtenons un pic de Gamov d'une aire approximative de $7 \cdot 10^{-6}$ keV centré en $E_0 = 5,9$ keV et de largeur $\Delta_0 = 6,4$ keV.

Chapitre 3

Méthodes de calculs

3.1 Méthode de Numerov

C'est une méthode numérique qui permet de résoudre les équations différentielles du type :

$$\frac{d^2y}{dr^2} = V(r)y(r) + W(r) \quad (3.1)$$

avec y défini sur l'intervalle $[r_1, r_2]$. Nous divisons ce domaine en sous-intervalle de longueur h et à chaque point intermédiaire r_i , on développe $y(r)$ en série de puissances. En additionnant les développements en séries de Taylor de $y(r+h)$ et $y(r-h)$ au voisinage de r , nous obtenons :

$$y(r+h) = 2y(r) - y(r-h) + h^2y''(r) + \frac{h^4}{12}y^{(4)}(r) + O(h^6) \quad (3.2)$$

En insérant dans cette équation, l'équation (3.1) pour $y''(r)$ et en approximant la dérivée quatrième de $y(r)$ par :

$$y^{(4)}(r) = \left. \frac{d^2y''}{dr^2} \right|_r \simeq \frac{1}{h^2} [y''(r+h) - 2y''(r) + y''(r-h)] \quad (3.3)$$

nous trouvons :

$$\begin{aligned} y(r+h) \left(1 - \frac{h^2}{12}V(r+h)\right) &= 2y(r) \left(1 - \frac{h^2}{12}V(r)\right) - y(r-h) \left(1 - \frac{h^2}{12}V(r-h)\right) \\ &+ h^2V(r)y(r) + \frac{h^2}{12} [(W(r-1) + 10W(r) + W(r+1))] + O(h^6) \end{aligned} \quad (3.4)$$

En posant :

$$\xi(r) = y(r) \left(1 - \frac{h^2}{12}V(r)\right) \quad (3.5)$$

nous pouvons écrire (3.4) sous la forme :

$$\xi(r+h) = 2\xi(r) - \xi(r-1) + h^2 V(r)y(r) + \frac{h^2}{12} [(W(r-1) + 10W(r) + W(r+1))] + O(h^6) \quad (3.6)$$

Dans le cas d'un système d'équations couplées, la méthode s'étend facilement. Nous devons alors résoudre :

$$y_i''(r) = \sum_j V_{ij}y_j(r) + W_i(r) \quad (3.7)$$

En posant,

$$\xi_i(r) = \sum_j y_j(r) \left(\delta_{ij} - \frac{h^2}{12} V_{ij}(r) \right) \quad (3.8)$$

nous obtenons :

$$\xi_i(r+h) = 2\xi_i(r) - \xi_i(r-1) + \sum_j h^2 V_{ij}(r)y_j(r) + \frac{h^2}{12} [(W_i(r-1) + 10W_i(r) + W_i(r+1))] \quad (3.9)$$

Chapitre 4

L'interaction nucléon-nucléon

4.1 Introduction

Pour décrire un système à deux nucléons (que se soit un état de diffusion neutron-neutron, neutron-proton ou proton-proton ou l'état lié neutron-proton), il faut considérer l'équation de Schrödinger :

$$H\psi^{JM\pi} = E\psi^{JM\pi} \quad (4.1)$$

avec

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\bar{\nabla}_{\bar{r}}^2 + V(\bar{r}) \quad (4.2)$$

où $\bar{r} = \bar{r}_1 - \bar{r}_2$ est la coordonnée relative des deux nucléons, $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ est la masse réduite du système, V est le potentiel d'interaction des deux nucléons, il est constitué d'un terme de répulsion coulombienne V^{coul} et d'un terme nucléaire V_{ij} , E est l'énergie du système dans le référentiel du centre de masse et ψ est la fonction d'onde du système :

$$\psi^{JM\pi}(\bar{r}) = \sum_{LS} y_{LS}^{J\pi}(r) [Y_L(\theta, \phi) \otimes \chi_S]^{JM} = \sum_{LS} y_{LS}^{J\pi}(r) |LSJM\rangle . \quad (4.3)$$

où L et S sont les moments angulaires orbital et de spin respectivement et

$$|LSJM\rangle = \sum_{M_L M_S} \langle LM_L SM_S | LSJM \rangle |LM_L SM_S\rangle \quad (4.4)$$

En coordonnées sphériques, le hamiltonien (4.2) devient :

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{\bar{L}^2}{\hbar^2 r^2} \right] + V \quad (4.5)$$

avec

$$\bar{L}^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \quad (4.6)$$

Comme dans [WSA84], nous considérons un potentiel nucléaire constitué d'une somme de quatorze opérateurs que nous écrivons sous la forme :

$$V_{ij} = \sum_{p=1}^{14} v_p(r) O_{ij}^p \quad (4.7)$$

où $v_p(r)$ est un coefficient dépendant de r et les opérateurs sont :

$$O_{ij}^{p=1,14} = 1, \bar{\tau}_i \cdot \bar{\tau}_j, \bar{\sigma}_i \cdot \bar{\sigma}_j, (\bar{\sigma}_i \cdot \bar{\sigma}_j)(\bar{\tau}_i \cdot \bar{\tau}_j), S_{ij}, S_{ij}(\bar{\tau}_i \cdot \bar{\tau}_j), (\bar{L} \cdot \bar{S}), (\bar{L} \cdot \bar{S})(\bar{\tau}_i \cdot \bar{\tau}_j), \bar{L}^2, \bar{L}^2(\bar{\tau}_i \cdot \bar{\tau}_j), \bar{L}^2(\bar{\sigma}_i \cdot \bar{\sigma}_j), \bar{L}^2(\bar{\sigma}_i \cdot \bar{\sigma}_j)(\bar{\tau}_i \cdot \bar{\tau}_j), (\bar{L} \cdot \bar{S})^2, (\bar{L} \cdot \bar{S})^2(\bar{\tau}_i \cdot \bar{\tau}_j) \quad (4.8)$$

avec $S_{ij} = 3(\bar{\sigma}_i \cdot \hat{r}_{ij})(\bar{\sigma}_j \cdot \hat{r}_{ij}) - \bar{\sigma}_i \cdot \bar{\sigma}_j$. Pour alléger la notation, les différentes composantes du potentiel sont habituellement notées : $c, \tau, \sigma, \sigma\tau, t, t\tau, b, b\tau, q, q\tau, q\sigma, q\sigma\tau, bb$ et $bb\tau$.

Dans la littérature, nous pouvons également trouver des potentiels plus compliqués avec une somme de vingt-huit termes (par exemple dans [WSA84]).

Ce qui nous intéresse, c'est l'action du hamiltonien sur un ket $|LSJM\rangle$ et pour cela nous calculons les éléments de matrices $\langle L'S'J'M'|H|LSJM\rangle$. Nous ne développerons ici que le calcul du terme tensoriel, S_{12} , les autres étant simples à calculer.

$$\langle L'S'J'M'|S_{12}|LSJM\rangle = \sqrt{\frac{96\pi}{5}} \langle L'S'J'M'| [Y^{(2)} \times S^{(2)}]^{(0)} |LSJM\rangle \quad (4.9)$$

$$= \sqrt{\frac{96\pi}{5}} (-)^{L+S+J} [(2L'+1)(2S'+1)]^{1/2} \left\{ \begin{matrix} L' & S' & J \\ S & L & 2 \end{matrix} \right\} \langle L' || Y^{(2)} || L \rangle \langle S' || S^{(2)} || S \rangle \quad (4.10)$$

$$= 2\sqrt{30} (-)^{J+1} [(2L'+1)(2L+1)]^{1/2} \left\{ \begin{matrix} L' & 1 & J \\ 1 & L & 2 \end{matrix} \right\} \left(\begin{matrix} 2 & L & L' \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right) \quad (4.11)$$

où la deuxième équation a été établie en utilisant le théorème de Wigner-Eckart (A.1) et la définition (A.2) et la dernière équation par le fait que $S = S' = 1$ et grâce aux résultats de l'annexe A.

Le choix de $S = 1$ vient du fait que pour l'interaction entre deux nucléons, nous couplons deux spins $1/2$ pour former un spin total $S = 0$ ou $S = 1$ et que pour $S = S' = 0$ l'élément de matrice de S_{12} est nul. De plus, dans l'équation (4.11), le 3-j est non nul si $L + L' + 2$ est pair et si la règle triangulaire $\Delta(L, L', 2)$ est satisfaite. Cela implique que la somme $L + L'$ doit être un nombre pair et que la différence de L et L' doit différer de 0 ou de 2.

Les éléments de matrice calculés avec les valeurs des symboles 3-j et 6-j repris dans la section (A.4) sont donc :

$$1) \quad \langle J - 11JM | S_{12} | J - 11JM \rangle = -\frac{2(J-1)}{2J+1} \quad (4.12)$$

$$2) \quad \langle J + 11JM | S_{12} | J - 11JM \rangle = \frac{6\sqrt{J(J+1)}}{2J+1} \quad (4.13)$$

$$3) \quad \langle J + 11JM | S_{12} | J + 11JM \rangle = -\frac{2(J+2)}{2J+1} \quad (4.14)$$

L'opérateur S_{12} étant hermitique, on retrouve bien la propriété que l'équation (4.11) est symétrique en L et L' . Nous n'avons bien que trois éléments de matrice à calculer.

Nous projetons :

$$\begin{aligned} & H(y_{L=J-1,S=1}(r)|J-1, S=1, J, M\rangle + y_{J+1,1}(r)|J+1, S=1, J, M\rangle) \\ & = E(y_{J-1,1}(r)|J-1, S=1, J, M\rangle + y_{J+1,1}(r)|J+1, S=1, J, M\rangle) \end{aligned} \quad (4.15)$$

sur les états $\langle J-1JM|$ et $\langle J+1JM|$ et en utilisant la propriété selon laquelle les fonctions d'onde sont orthonormées et en posant $u(r) = ry_{J-1,1}(r)$ et $w(r) = ry_{J+1,1}(r)$, nous obtenons le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \left(-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{J(J-1)}{r^2} + \frac{e^2 Z_1 Z_2}{r} + V_{11}(r) \right) u(r) + V_{12}(r)w(r) = Eu(r) \\ \left(-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{(J+1)(J+2)}{r^2} + \frac{e^2 Z_1 Z_2}{r} + V_{22}(r) \right) w(r) + V_{21}(r)u(r) = Ew(r) \end{cases} \quad (4.16)$$

avec $e = \frac{e}{4\pi\epsilon_0}$ est la charge réduite et où

$$\begin{aligned} V_{11}(r) &= v_c(r) - 3v_\tau(r) + v_\sigma(r) - 3v_{\sigma\tau}(r) + v_t(r) \frac{-2(J-1)}{2J+1} \\ &\quad - 3v_{t\tau}(r) \frac{-2(J-1)}{2J+1} + v_b(r)(J-1) - 3v_{b\tau}(r)(J-1) \\ &\quad + v_q(r)J(J-1) - 3v_{q\tau}(r)J(J-1) + v_{q\sigma}(r)J(J-1) \\ &\quad - 3v_{q\sigma\tau}(r)J(J-1) + v_{bb}(r)(J-1)^2 - 3v_{bb\tau}(r)(J-1)^2 \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$V_{12}(r) = V_{21}(r) = v_t(r) \frac{6\sqrt{J(J+1)}}{2J+1} + v_{t\tau}(r) \frac{6\sqrt{J(J+1)}}{2J+1} (2T(T+1) - 3) \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} V_{22}(r) &= v_c(r) - 3v_\tau(r) + v_\sigma(r) - 3v_{\sigma\tau}(r) + v_t(r) \frac{-2(J+2)}{2J+1} - 3v_{t\tau}(r) \frac{-2(J+2)}{2J+1} \\ &\quad - v_b(r)(J+2) + 3v_{b\tau}(r)(J+2) + v_q(r)(J+1)(J+2) - 3v_{q\tau}(r)(J+1)(J+2) \\ &\quad + v_{q\sigma}(r)(J+1)(J+2) - 3v_{q\sigma\tau}(r)(J+1)(J+2) + v_{bb}(r)(J+2)^2 \\ &\quad - 3v_{bb\tau}(r)(J+2)^2 \end{aligned} \quad (4.19)$$

Nous obtenons deux équations couplées. Ceci est dû à la présence du terme tensoriel dans l'expression du potentiel.

Dans le cas où $S = 0$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} V_{11}(r) &= v_c(r) + v_\tau(r) - 3v_\sigma(r) - 3v_{\sigma\tau}(r) + v_q(r)J(J-1) + v_{q\tau}(r)J(J-1) \\ &\quad - 3v_{q\sigma}(r)J(J-1) - 3v_{q\sigma\tau}(r)J(J-1) \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$V_{12}(r) = V_{21}(r) = 0 \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} V_{22}(r) &= v_c(r) + v_\tau(r) - 3v_\sigma(r) - 3v_{\sigma\tau}(r) + v_q(r)(J+1)(J+2) \\ &\quad + v_{q\tau}(r)(J+1)(J+2) - 3v_{q\sigma}(r)(J+1)(J+2) \\ &\quad - 3v_{q\sigma\tau}(r)(J+1)(J+2) \end{aligned} \quad (4.22)$$

En présence d'un potentiel central, le hamiltonien (4.2) devient :

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{\bar{L}^2}{\hbar^2 r^2} \right] + V(r) \quad (4.23)$$

Et nous avons les règles de commutations suivantes :

$$[H, \bar{L}^2] = [H, L_z] = [\bar{L}^2, L_z] = [H, \bar{S}^2] = [H, S_z] = [\bar{S}^2, S_z] = 0 \quad (4.24)$$

Le système est séparable et la fonction d'onde peut s'écrire :

$$\psi_{E,l,m_l}(r, \theta, \phi) = y_{E,l}(r) Y_{lm}(\theta, \phi) \chi_S \quad (4.25)$$

où Y_{lm} sont les harmoniques sphériques. En posant, $u_{E,l} = r y_{E,l}(r)$, nous obtenons l'équation radiale :

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{e^2 Z_1 Z_2}{r} + V^{nuc}(r) \right] u_{E,l}(r) = E u_{E,l}(r) \quad (4.26)$$

4.2 Le deuton

Dans cette section, nous allons établir la fonction d'onde de l'état lié neutron-proton (n-p). Le deuton est un état $J^\pi = 1^+$ constitué d'un proton ($1/2^+$) couplé à un neutron ($1/2^+$) avec un moment angulaire orbital L . Les différents états de la fonction d'onde du deuton sont déterminés grâce aux règles de sélection.

Regardons dans un premier temps la parité. Elle doit valoir $+1$ et elle est définie par :

$$\pi = \pi_p \pi_n (-)^L = +1 \quad (4.27)$$

Les L pairs seront sélectionnés. Pour ce qui est du spin, nous couplons deux spins $1/2$ pour former un spin total $S = 0$ et $S = 1$. Or, nous devons obtenir un moment angulaire total J égal à un. Puisque

$$\bar{J} = \bar{L} + \bar{S}, \quad (4.28)$$

les couples possibles pour (L, S) seront un état $(L = 0, S = 1)$ et un état $(L = 2, S = 1)$. La fonction d'onde du deuton est un mélange de ces deux états :

$$\psi_d^{JM\pi}(r) = y_{L=0,S=1}(r) |L = 0, S = 1, J = 1, M\rangle + y_{21}(r) |L = 2, S = 1, J = 1, M\rangle \quad (4.29)$$

avec

$$\int (|y_{01}(r)|^2 + |y_{21}(r)|^2) dr = 1 \quad (4.30)$$

Pour l'état lié ($L = 0$ ou $2, S = 1, T = 0$), le système (4.16) devient en posant à nouveau $u(r) = r y_{01}(r)$ et $w(r) = r y_{21}(r)$:

$$\begin{cases} \left(-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} + V_{11}(r) \right) u(r) + V_{12}(r) w(r) = E u(r) \\ \left(-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{6}{r^2} + V_{22}(r) \right) w(r) + V_{21}(r) u(r) = E w(r) \end{cases} \quad (4.31)$$

avec

$$V_{11}(r) = v_c(r) - 3v_\tau(r) + v_\sigma(r) - 3v_{\sigma\tau}(r) \quad (4.32)$$

$$V_{12}(r) = V_{21}(r) = 2\sqrt{2}v_t(r) - 6\sqrt{2}v_{t\tau}(r) \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} V_{22}(r) &= v_c(r) - 3v_\tau(r) + v_\sigma(r) - 3v_{\sigma\tau}(r) - 2v_t(r) + 6v_{t\tau}(r) - 3v_b(r) + 9v_{b\tau}(r) + 6v_q(r) \\ &\quad - 18v_{q\tau}(r) + 6v_{q\sigma}(r) - 18v_{q\sigma\tau}(r) + 9v_{bb}(r) - 27v_{bb\tau}(r) \end{aligned} \quad (4.34)$$

résolution

4.3 L'état libre

Pour ce qui est de la fonction de diffusion proton-proton, nous avons donc fermions identiques. La fonction d'onde doit être antisymétrique sous l'échange de paires de particules

$$\psi^{JM\pi}(1, 2) = -\psi^{JM\pi}(2, 1) . \quad (4.35)$$

Ceci se traduit par la condition sur L et S suivante :

$$1 = (-)^{L-S} \quad (4.36)$$

chapitre 2 De plus, nous devons obtenir un état final 1^+ via une désintégration β . Les transitions β se font par deux interactions distinctes, les interactions de Fermi et de Gamov-Teller. Les règles de sélection pour ces deux interactions sont :

– interaction de Fermi :

$$\Delta J = 0 \text{ et } \pi_i = \pi_f \quad (4.37)$$

– interaction de Gamov-Teller :

$$\Delta J = 0, \pm 1 \text{ et } \pi_i = \pi_f \quad (4.38)$$

Nous allons d'abord nous intéresser à la parité. La parité finale, celle du deuton, vaut $+1$. La parité de l'état initial vaut quant à elle $(-)^L$ (cf. équation 4.27). Nous pouvons voir par :

$$\pi_i = (-)^L = +1 \quad (4.39)$$

que ce sont les L pairs qui sont sélectionnés. Comme l'antisymétrie de la fonction d'onde implique la relation (4.36) S sera aussi pair. Il vaudra donc $S = 0$ (puisque nous avons couplé deux protons de spin $1/2$).

Regardons maintenant la règle de sélection quant au ΔJ . Nous voulons un état final $J = 1$ via une interaction β et en couplant pour l'état initial $S = 0$ à un L pair. Par les règles de sélection (4.37) et (4.38), nous trouvons un état initial 0^+ ($L = 0, S = 0$) et un état 2^+ ($L = 2, S = 0$). Nous pouvons remarquer que les transitions de Fermi sont donc interdites.