

Université Libre de Bruxelles
Faculté des Sciences Appliquées

Année académique
2003-2004

Étude microscopique de la collision élastique $^{14}\text{O} + \text{proton}$

Directeurs de Mémoire :
Pr. D. Baye
Pr. P. Descouvemont

Mémoire de fin d'études présenté par
François Leo en vue de l'obtention
du grade d'Ingénieur Civil Physicien.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier vivement le Professeur Daniel Baye et le Professeur Pierre Descouvemont d'avoir accepté de diriger ce mémoire. Leur disponibilité, leur patience et leurs conseils avisés m'ont permis d'effectuer ce travail les meilleures conditions.

Je voudrais également remercier Messieurs Pierre Capel et Anh Tuan Nguyen pour leurs réponses à mes questions pas toujours très pertinentes.

J'aimerais aussi exprimer ma reconnaissance à ma mère et à mon frère Laurent qui ont corrigé d'innombrables fautes de Français.

Enfin, je tiens à remercier ma famille et mes proches pour leurs encouragements et leur soutien tout au long de mes études.

Table des matières

Introduction	5
1 Description du modèle	7
1.1 Notations	7
1.2 Le Hamiltonien	8
1.2.1 Généralités et changement de coordonnées	8
1.2.2 L'interaction à deux corps	9
1.3 Les fonctions d'ondes microscopiques	10
1.3.1 Les fonctions d'onde en région asymptotique	11
1.3.2 La méthode des groupes résonnants - RGM	12
1.3.3 La méthode de la coordonnée génératrice - GCM	13
1.4 La méthode de la Matrice R Microscopique - MRM	15
2 Le système ^{14}O + proton	18
2.1 Les fonctions d'onde	18
2.1.1 La fonction d'onde individuelle des nucléons	18
2.1.2 Déterminants de Slater	20
2.1.3 Mouvement du centre de masse	21
2.1.4 Projection sur le moment cinétique total et la parité	23
2.2 Les éléments de matrice	25
2.2.1 Éléments de matrice du Hamiltonien	25
2.2.2 Correction du centre de masse	28
2.2.3 Exemple : le produit scalaire	28
3 Déphasages et sections efficaces du système ^{14}O + proton	31
3.1 Les potentiels nucléon-nucléon	31
3.1.1 Le potentiel central	31
3.1.2 Le potentiel spin-orbite	32
3.2 Le paramètre de l'oscillateur	32
3.3 États liés	33
3.3.1 Principe de calcul	33

3.3.2	Les états liés du ^{15}C	33
3.4	Déphasages et sections efficaces	34
3.4.1	Diffusion ^{14}C + neutron	35
3.4.2	Diffusion ^{14}O + proton	37
4	Déphasages et sections efficaces du système ^{15}O + proton	46
4.1	Le système ^{15}O + proton	46
4.2	États liés	47
4.2.1	Principe de calcul	47
4.2.2	Les états liés du ^{16}N	47
4.3	Diffusion ^{15}O + proton	48
4.3.1	Déphasages	48
4.3.2	Fonctions d'excitation	52
	Conclusion	54
	A Généralisation de la méthode de la Matrice R Microscopique	55
	Bibliographie	59

Introduction

Les progrès effectués ces dernières années dans le domaine des faisceaux d'ions radioactifs permettent une étude expérimentale plus précise de noyaux instables en particules. Il a été montré que ces noyaux jouissent de propriétés différentes des noyaux stables, ce qui rend leur étude fort intéressante. Le ^{15}F en particulier est instable en protons et ne possède donc pas d'états liés mais seulement des états de diffusion. Les déphasages et sections efficaces différentielles de la collision $^{14}\text{O} + \text{proton}$ fournissent toute l'information sur ces états de diffusion. Nous avons commencé ce travail dans le but de prédire les caractéristiques de ce noyau à l'aide d'un modèle microscopique. Des résultats expérimentaux ont été publiés en cours d'année [10,11] et viendront corroborer ou non nos résultats. Nous avons également ajouté l'étude de la collision $^{15}\text{O} + \text{proton}$ caractérisant les états de diffusion du ^{16}F , lui aussi instable en proton.

Plusieurs modèles permettent un calcul des sections efficaces différentielles. C'est le cas du modèle potentiel, dans lequel les deux noyaux sont considérés comme ponctuels et interagissent au travers d'une force dépendant d'une série de paramètres. Un grand nombre de résultats expérimentaux sont nécessaire à l'ajustement de ces paramètres. Le modèle microscopique traite individuellement les A nucléons du système, ce qui revient à résoudre un problème à A corps. De plus, l'antisymétrisation et les bons nombres quantiques sont traités exactement. L'avantage principal du modèle microscopique est le faible nombre de paramètres utilisés. En effet, les interactions nucléon-nucléon utilisées ne contiennent que deux paramètres ajustables qui dévient peu de leur valeur standard. Ceci nous permet de trouver la force la mieux adaptée à notre système au départ de peu de résultats expérimentaux. Une caractéristique commune des deux noyaux étudiés dans ce travail est le fait que leur noyau miroir possède des états liés. En utilisant la propriété d'indépendance de charge de l'interaction nucléaire, nous pouvons donc ajuster les paramètres du ^{15}F et du ^{16}F de façon à reproduire les états liés du ^{15}C et du ^{16}N .

Les caractéristiques du modèle microscopique sont reprises au chapitre 1. Dans le chapitre 2, le modèle est particularisé au système $^{14}\text{O} + \text{proton}$.

Les éléments de matrice nécessaires au calcul des sections efficaces y sont explicités. Enfin, aux chapitres 3 et 4, les résultats des systèmes $^{14}\text{O} + \text{proton}$ et $^{15}\text{O} + \text{proton}$ sont présentés et commentés.

Chapitre 1

Description du modèle

1.1 Notations

Une collision élastique est entièrement définie par les nombres de nucléons des deux noyaux en région asymptotique et les nombres quantiques qui leur sont associés. Nous pouvons donc caractériser notre réaction par l'ensemble suivant

$$\{A_1, Z_1, I_1, \pi_1, A_2, Z_2, I_2, \pi_2\} \quad (1.1)$$

où A_1 et A_2 désignent les nombres de nucléons, Z_1 et Z_2 les nombres de protons, I_1 et I_2 les spins intrinsèques et π_1 et π_2 les parités intrinsèques. De cet ensemble découlent naturellement le moment cinétique orbital l du mouvement relatif, le spin total I , le moment cinétique total J et la parité π du système des $A = A_1 + A_2$ nucléons

$$I = I_1 \oplus I_2 \quad (1.2)$$

$$J = I \oplus l \quad (1.3)$$

$$\pi = \pi_1 \pi_2 (-)^l \quad (1.4)$$

J et π sont les bons nombres quantiques de notre problème. Remarquons que I et l ne sont pas des bons nombres quantiques mais sont importants car ils caractérisent les différentes voies de la collision. En supposant que les coordonnées \mathbf{r}_1 à \mathbf{r}_{A_1} appartiennent au noyau 1 et que les coordonnées \mathbf{r}_{A_1+1}

à \mathbf{r}_A appartiennent au noyau 2, on définit les vecteurs suivant

$$\mathbf{R}_{cm,1} = \frac{1}{A_1} \sum_{i=1}^{A_1} \mathbf{r}_i \quad (i = 1, \dots, A_1) \quad (1.5)$$

$$\mathbf{R}_{cm,2} = \frac{1}{A_2} \sum_{i=A_1+1}^A \mathbf{r}_i \quad (i = A_1 + 1, \dots, A) \quad (1.6)$$

$$\mathbf{R}_{cm} = \frac{1}{A} \left[\sum_{i=1}^{A_1} \mathbf{r}_i + \sum_{i=A_1+1}^A \mathbf{r}_i \right] \quad (1.7)$$

où $\mathbf{R}_{cm,1}$ et $\mathbf{R}_{cm,2}$ désignent respectivement le vecteur position du centre de masse des noyaux 1 et 2 et \mathbf{R}_{cm} le vecteur position du centre de masse du système total des A nucléons. Choisissons comme nouveau système de coordonnées, les coordonnées internes des nucléons,

$$\boldsymbol{\xi}_{1,i} = \mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm,1} \quad (i = 1, \dots, A_1) \quad (1.8)$$

$$\boldsymbol{\xi}_{2,i} = \mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm,2} \quad (i = A_1 + 1, \dots, A) \quad (1.9)$$

la coordonnée relative

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{R}_{cm,2} - \mathbf{R}_{cm,1} \quad (1.10)$$

et la coordonnée du centre de masse \mathbf{R}_{cm}

1.2 Le Hamiltonien

1.2.1 Généralités et changement de coordonnées

Le Hamiltonien d'un système de A nucléons s'écrit

$$H = T + V = -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^A \Delta_{\mathbf{r}_i} + \sum_{i>j=1}^A V_{ij} \quad (1.11)$$

où m est la masse du nucléon, V_{ij} est l'interaction à deux corps que nous expliciterons plus loin dans ce chapitre et Δ l'opérateur Laplacien associé au vecteur position mis en indice.

On peut montrer que, dans notre nouveau système de coordonnées, le Hamiltonien devient

$$H = H_1 + H_2 - \frac{\hbar^2}{2mA} \Delta_{\mathbf{R}_{cm}} - \frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta_{\boldsymbol{\rho}} + \sum_{i=1}^{A_1} \sum_{j=A_1+1}^A V_{ij} \quad (1.12)$$

avec

$$H_1 = -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^{A_1} \Delta_{\xi_{1,i}} + \sum_{i>j=1}^{A_1} V_{ij} \quad (1.13)$$

$$H_2 = -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{j=A_1+1}^A \Delta_{\xi_{2,j}} + \sum_{i>j=A_1+1}^A V_{ij} \quad (1.14)$$

$$\mu = \frac{A_1 A_2}{A} \quad (1.15)$$

H_1 et H_2 sont les Hamiltoniens internes des noyaux 1 et 2 et μ est la masse réduite adimensionnelle.

1.2.2 L'interaction à deux corps

L'interaction nucléon-nucléon peut se mettre sous la forme d'une somme de quatre termes

$$V_{ij} = V_{ij}^C + V_{ij}^{NC} + V_{ij}^{NSO} + V_{ij}^{NT} \quad (1.16)$$

représentant l'interaction coulombienne, centrale, spin-orbite et tensorielle, les trois dernières composant l'interaction nucléaire. Nous négligeons dans notre modèle l'interaction tensorielle.

L'interaction coulombienne

Dans le formalisme de l'isospin, elle a pour expression

$$V_{ij}^C = \frac{e^2}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \left(\frac{1}{2} - t_{i3}\right) \left(\frac{1}{2} - t_{j3}\right) \quad (1.17)$$

où t_{i3} désigne la projection de l'isospin du nucléon i sur l'axe 3 de l'espace des isospins et où $(\frac{1}{2} - t_{i3})$ correspond donc au nombre de charges de ce même nucléon.

L'interaction centrale

L'interaction centrale, invariante par rotation de l'espace, s'écrit

$$V_{ij}^{NC} = V_W(r_{ij}) - V_M(r_{ij}) P_{ij}^\sigma P_{ij}^\tau + V_B(r_{ij}) P_{ij}^\sigma - V_H(r_{ij}) P_{ij}^\tau \quad (1.18)$$

Cette expression comprend l'opérateur d'échange de spin (Bartlett)

$$P^\sigma = \frac{1}{2} (1 + \boldsymbol{\sigma}_1 \boldsymbol{\sigma}_2) \quad (1.19)$$

avec

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mathbf{s} \quad (1.20)$$

l'opérateur d'échange d'isospin (Heisenberg)

$$P^\tau = \frac{1}{2}(1 + \boldsymbol{\tau}_1 \boldsymbol{\tau}_2) \quad (1.21)$$

avec

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mathbf{t} \quad (1.22)$$

et l'opérateur d'échange des coordonnées spatiales (Majorana)

$$-P^\sigma P^\tau \quad (1.23)$$

La dépendance spatiale sera choisie de type gaussienne

$$V_{ij}^{NC} = \sum_k V_k (W_k - M_k P^\sigma P^\tau + B_k P^\sigma - H_k P^\tau) \exp\left(-\frac{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2}{\mu_k^2}\right) \quad (1.24)$$

où V_k , W_k , M_k , B_k et H_k et μ_k sont des constantes.

L'interaction spin-orbite

Nous définissons l'interaction spin-orbite à l'aide d'une gaussienne à très courte portée [5]

$$V_{ij}^{NSO} = -\frac{2S_0}{\hbar^2 \nu^5} \mathbf{l}_{ij} \cdot \mathbf{s}_{ij} \exp\left(-\frac{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2}{\nu^2}\right) \quad (1.25)$$

avec

$$\mathbf{s}_{ij} = \mathbf{s}_i + \mathbf{s}_j \quad (1.26)$$

$$\mathbf{l}_{ij} = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \frac{1}{2}(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j) \quad (1.27)$$

où S_0 est un paramètre, ν est petit et peut tendre vers zéro, \mathbf{s}_{ij} est le spin total des deux nucléons et \mathbf{l}_{ij} est le moment cinétique orbital relatif des deux nucléons.

1.3 Les fonctions d'ondes microscopiques

Les fonctions d'onde des états libres solutions de l'équation de Schrödinger associée à l'Hamiltonien 1.11 ne sont pas connues exactement. Elles sont approchées par des fonctions d'onde microscopiques que nous exprimerons dans le formalisme de la méthode de la coordonnée génératrice (GCM). Nous nous intéressons dans ce chapitre aux collisions à une voie, c'est à dire les collisions pour lesquelles le couple (lI) est fixé pour J et π donnés.

1.3.1 Les fonctions d'onde en région asymptotique

Dans la région asymptotique, les forces nucléaires étant de courte portée, le Hamiltonien 1.12 prend la forme

$$H^{as} = H_1 + H_2 - \frac{\hbar^2}{2mA} \Delta_{\mathbf{R}_{cm}} - \frac{\hbar^2}{2m\mu} \Delta_{\boldsymbol{\rho}} + Z_1 Z_2 \frac{e^2}{\rho} \quad (1.28)$$

en effet, pour $\rho \gg 1$ on a

$$V_{ij}^C = \sum_{i=1}^{Z_1} \sum_{j=Z_1+1}^Z \frac{e^2}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \approx Z_1 Z_2 \frac{e^2}{\rho} \quad (1.29)$$

Désignons par $\phi_{I_1\nu_1}^{\pi_1}(\boldsymbol{\xi}_1)$ et $\phi_{I_2\nu_2}^{\pi_2}(\boldsymbol{\xi}_1)$, où ν_i est la projection du spin I_i , les fonctions d'onde internes des noyaux 1 et 2. Elles sont solutions de

$$H_1 \phi_{I_1\nu_1}^{\pi_1}(\boldsymbol{\xi}_1) = E_1 \phi_{I_1\nu_1}^{\pi_1}(\boldsymbol{\xi}_1) \quad (1.30)$$

$$H_2 \phi_{I_2\nu_2}^{\pi_2}(\boldsymbol{\xi}_2) = E_2 \phi_{I_2\nu_2}^{\pi_2}(\boldsymbol{\xi}_2) \quad (1.31)$$

Elles sont orthonormées, antisymétrisées et invariantes par translation. Dans notre modèle, ces fonctions d'onde sont construites à partir du modèle en couche (oscillateur harmonique). Le couplage des deux spins intrinsèques donne la fonction d'onde

$$\phi_{I\nu}^{\pi_1\pi_2}(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2) = \sum_{\nu_1\nu_2} (I_1 I_2 \nu_1 \nu_2 | I \nu) \phi_{I_1\nu_1}^{\pi_1}(\boldsymbol{\xi}_1) \phi_{I_2\nu_2}^{\pi_2}(\boldsymbol{\xi}_2) \quad (1.32)$$

La fonction d'onde de voie s'obtient en couplant le spin I et le moment cinétique orbital du moment relatif l

$$\varphi_{II}^{JM\pi}(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \Omega_\rho) = \sum_{m\nu} (lIm\nu | JM) Y_l^m(\Omega_\rho) \phi_{I\nu}^{\pi_1\pi_2}(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2) \quad (1.33)$$

Après factorisation de la fonction d'onde du centre de masse, l'onde partielle en région asymptotique correspondant aux bons nombres quantiques $JM\pi$ peut se mettre sous la forme

$$\Psi_{II}^{JM\pi,as} = g_{II}^{J\pi,as}(\rho) \varphi_{II}^{JM\pi}(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \Omega_\rho) \quad (1.34)$$

où la fonction radiale $g_{II}^{J\pi,as}(\rho)$ est solution de l'équation de Schrödinger coulombienne

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu m} \left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} \right) + Z_1 Z_2 \frac{e^2}{\rho} - E \right] g_{II}^{J\pi,as}(\rho) = 0 \quad (1.35)$$

avec

$$E = E_T - E_1 - E_2 = \frac{\hbar^2 k^2}{2m\mu} = \frac{1}{2}m\mu v^2 \quad (1.36)$$

où E_T est une valeur propre positive du Hamiltonien 1.28. Les fonctions $g_{II}^{J\pi,as}(\rho)$ sont connues et dépendent des fonctions coulombiennes entrantes et sortantes I_l et O_l ,

$$I_l(\eta, x) = e^{i\sigma_l} (G_l(\eta, x) - iF_l(\eta, x)) \quad (1.37)$$

$$O_l(\eta, x) = e^{-i\sigma_l} (G_l(\eta, x) + iF_l(\eta, x)) \quad (1.38)$$

où η est le paramètre de Sommerfeld et σ_l sont les déphasages coulombiens, définis comme suit

$$\eta = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar v} \quad (1.39)$$

$$\sigma_l = \arg \Gamma(l + 1 + i\eta) \quad (1.40)$$

et où $F_l(\eta, x)$ et $G_l(\eta, x)$ sont les fonctions coulombiennes régulière et irrégulière [4]. Nous omettrons dorénavant la dépendance en le paramètre de Sommerfeld des fonctions d'onde coulombiennes entrantes et sortantes afin d'alléger l'écriture. Pour $E > 0$, nous avons

$$g_{II}^{J\pi,as}(\rho) = n_l \frac{I_l(k\rho) - U_{II}^{J\pi} O_l(k\rho)}{k\rho} \quad (1.41)$$

avec

$$n_l = i^{l+1} \left[-\frac{\pi(2l+1)}{v} \right]^{1/2} \quad (1.42)$$

et où $U_{II}^{J\pi}$ est la matrice de collision et contient toute l'information sur la collision étudiée.

1.3.2 La méthode des groupes résonnants - RGM

Dans cette méthode, nous considérons la forme 1.34 de la fonction d'onde asymptotique comme valable dans la zone où l'interaction nucléaire entre nucléons des deux noyaux ne peut être négligée. Les nucléons étant des fermions, cette fonction d'onde doit néanmoins être antisymétrisée. L'onde partielle dans le formalisme RGM s'écrit [6]

$$\Psi_{II}^{JM\pi} = \mathcal{A} g_{II}^{J\pi}(\rho) \varphi_{II}^{JM\pi}(\xi_1, \xi_2, \Omega_\rho) \quad (1.43)$$

où nous avons introduit l'opérateur d'antisymétrisation \mathcal{A} défini par

$$\mathcal{A} = \frac{1}{A!} \sum_p \epsilon_p P_p \quad (1.44)$$

où la somme porte sur les $A!$ permutations p et où ϵ_p est défini comme suit

$$\epsilon_p = \begin{cases} +1 & \text{si la permutation } p \text{ est paire} \\ -1 & \text{si la permutation } p \text{ est impaire} \end{cases} \quad (1.45)$$

Les inconnues du problèmes sont les fonctions radiales $g_{II}^{J\pi}(\rho)$. Cette méthode est lourde et mal adaptée au calcul numérique, elle est utilisée lorsque le système comprend un petit nombre de nucléons.

1.3.3 La méthode de la coordonnée génératrice - GCM

La méthode GCM est mieux adaptée au calcul numérique et permet de résoudre le problème pour un plus grand nombre de nucléons. Les fonctions d'onde internes $\phi_{I_1\nu_1}^{\pi_1}(\boldsymbol{\xi}_1)$ et $\phi_{I_2\nu_2}^{\pi_2}(\boldsymbol{\xi}_2)$ sont décrites par deux puits d'oscillateur harmonique de même paramètre b dont les centres sont séparés par la coordonnée génératrice $\mathbf{R} = R \mathbf{1}_{c_1 c_2}$. Nous avons choisi de prendre le même paramètre d'oscillateur pour les deux centres afin de faciliter la factorisation du centre de masse (voir 2.1.3). Remarquons que, lorsqu'un des deux noyaux est composé d'un seul nucléon, celui-ci n'ayant pas de composition interne, le mouvement d'oscillateur équivaut au mouvement du centre de masse. Comme nous nous intéressons aux propriétés de la fonction d'onde interne de notre problème, prendre le même paramètre d'oscillateur n'est, dans ce cas, pas une approximation. La base GCM peut s'écrire [5]

$$\phi_{II}^{JM\pi}(R) = C \mathcal{A} \varphi_{II}^{JM\pi}(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \Omega_\rho) \Gamma_l(\rho, R) \quad (1.46)$$

avec

$$\Gamma_l(\rho, R) = \left(\frac{\mu}{\pi b^2}\right)^{3/4} \exp\left(-\frac{\mu(\rho^2 + R^2)}{2b^2}\right) i_l\left(\frac{\mu\rho R}{b^2}\right) \quad (1.47)$$

où i_l désigne la fonction de Hankel sphérique [4] et C est une constante de normalisation. Nous n'explicitons pas ici l'expression des différentes constantes de normalisation car leur valeur importe peu, il est juste important d'utiliser les mêmes tout au long de notre calcul. Afin d'utiliser cette base pour résoudre notre problème, définissons la fonction d'onde

$$\Psi_{II}^{JM\pi} = \int f_{II}^{J\pi}(R) \phi_{II}^{JM\pi}(R) dR \quad (1.48)$$

Cette fonction d'onde est équivalente à celle de la méthode RGM. Les fonctions radiales inconnues $g_{II}^{J\pi}(\rho)$ sont remplacées par les fonctions génératrices inconnues $f_{II}^{J\pi}(R)$. Elles sont liées par la relation

$$g_{II}^{J\pi}(\rho) = \int \Gamma_l(\rho, R) f_{II}^{J\pi}(R) dR \quad (1.49)$$

Une propriété intéressante de la fonction d'onde 1.43 est qu'elle peut être exprimée comme une combinaison linéaire de déterminants de Slater (voir chapitre 2) projetés sur le moment cinétique total et la parité. Cette propriété nous permettra de résoudre plus facilement les éléments de matrice qui interviendront dans notre calcul. Cette nouvelle base est appelée base 'intrinsèque' du modèle GCM. Appelons K_1 et K_2 les projections des spins I_1 et I_2 sur l'axe $1_{c_1c_2}$ supportant la coordonnée génératrice. Désignons par $\Phi_{K_1K_2}^{\pi_1\pi_2}(\mathbf{R})$ le déterminant de Slater de dimension A impliquant A_1 fonctions d'onde d'un oscillateur harmonique centré en \mathbf{R}_1 et A_2 fonctions d'onde d'un oscillateur harmonique centré en \mathbf{R}_2 , avec

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1 \quad (1.50)$$

Les deux oscillateurs considérés ont le même paramètre b . Nous pouvons montrer, et nous le ferons pour notre système (voir chapitre 2), que nous pouvons écrire le déterminant $\Phi_{K_1K_2}^{\pi_1\pi_2}(\mathbf{R})$ sous la forme

$$\Phi_{K_1K_2}^{\pi_1\pi_2}(\mathbf{R}) = C' \phi_{cm}(\mathbf{R}_{cm} - \mathbf{S}) \mathcal{A} \phi_{I_1K_1}^{\pi_1}(\boldsymbol{\xi}_1) \phi_{I_2K_2}^{\pi_2}(\boldsymbol{\xi}_2) \Gamma(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{R}) \quad (1.51)$$

avec

$$\mathbf{S} = \frac{A_2}{A} \mathbf{R} \quad (1.52)$$

$$\phi_{cm}(\mathbf{R}_{cm} - \mathbf{S}) = \left(\frac{A}{\pi b^2} \right)^{3/4} \exp\left(-\frac{A(\mathbf{R}_{cm} - \mathbf{S})^2}{2b^2}\right) \quad (1.53)$$

$$\Gamma(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{R}) = \left(\frac{\mu}{\pi b^2} \right)^{3/4} \exp\left(-\frac{\mu(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{R})^2}{2b^2}\right) \quad (1.54)$$

et où nous avons placé l'origine en \mathbf{R}_1 . Remarquons que les fonctions d'ondes internes $\phi_{I_1K_1}^{\pi_1}(\boldsymbol{\xi}_1)$ et $\phi_{I_2K_2}^{\pi_2}(\boldsymbol{\xi}_2)$ sont reliées aux fonctions d'onde $\phi_{I_1\nu_1}^{\pi_1}(\boldsymbol{\xi}_1)$ et $\phi_{I_2\nu_2}^{\pi_2}(\boldsymbol{\xi}_2)$ par un changement d'axe de la projection du spin intrinsèque. Le choix des axes étant arbitraire, nous choisissons de prendre le même axe afin de faciliter les calculs. Nous travaillerons dorénavant avec la fonction d'onde interne $\phi_{K_1K_2}^{\pi_1\pi_2}(\mathbf{R}) = \phi_{cm}^{-1} \Phi_{K_1K_2}^{\pi_1\pi_2}(\mathbf{R})$. Nous introduisons les bons nombres quantiques J , M et π en projetant la fonction d'onde 1.51 sur le moment cinétique total et la parité [6]

$$\phi_{K_1K_2}^{JM\pi}(R) = \frac{1}{2} (1 + \pi \mathbf{\Pi}) \int D_{MK}^J{}^*(\Omega) \mathcal{R}(\Omega) \phi_{K_1K_2}^{\pi_1\pi_2}(\mathbf{R}) d\Omega \quad (1.55)$$

où $\mathbf{\Pi}$ est l'opérateur parité, Ω représente les angles d'Euler, $\mathcal{R}(\Omega)$ est l'opérateur de rotation associé au moment cinétique total et D_{MK}^J ($K = K_1 + K_2$) est un élément de matrice de Wigner défini comme suit

$$D_{M'M}^J(\Omega) = \langle JM' | \mathcal{R}(\Omega) | JM \rangle \quad (1.56)$$

où $|JM\rangle$ est un état propre du carré du moment cinétique total \mathbf{J} . La base intrinsèque sera utilisée pour calculer les éléments de matrice de l'Hamiltonien mais la base (II) composée par les fonctions 1.46 est plus physique et mène a des expressions plus simples. Nous avons donc exprimé l'onde partielle de collision dans celle-ci. Nous aurons donc besoin de passer d'une base à l'autre, nous utiliserons pour cela la relation[5]

$$\phi_{II}^{JM\pi}(R) = \sum_{K_1 K_2} (I_1 I_2 K_1 K_2 | IK) (II0K | JK) \phi_{K_1 K_2}^{JM\pi}(R) \quad (1.57)$$

1.4 La méthode de la Matrice R Microscopique - MRM

En pratique l'intégrale 1.48 est discrétisée en un nombre fini n_g de valeurs de la coordonnée génératrice \mathbf{R} .

$$\Psi_{II}^{JM\pi} = \sum_{n=1}^{n_g} f_{II}^{J\pi}(R^n) \phi_{II}^{JM\pi}(R^n) \quad (1.58)$$

Ces fonctions d'onde étant construites à partir de fonctions qui tendent vers zéro comme des gaussiennes, elles ne peuvent convenir pour décrire un état libre en région asymptotique. Nous allons donc les connecter aux fonctions d'ondes asymptotiques. Nous utiliserons pour cela la méthode de la matrice R. Cette méthode consiste à diviser l'espace en deux domaines: les régions intérieure et extérieure. Dans le domaine intérieur, de rayon a , nous utilisons les fonctions d'onde 1.43 et dans le domaine extérieur, les fonctions d'ondes asymptotiques 1.34. L'équation à résoudre est celle de Bloch-Schrödinger

$$(H + \mathcal{L} - E) \Psi_{II}^{JM\pi} = \mathcal{L} \Psi_{II}^{JM\pi, as} \quad (1.59)$$

où \mathcal{L} est l'opérateur de Bloch [8], agissant sur la surface du domaine intérieur. Cet opérateur est introduit afin de rendre hermitique l'opérateur $H + \mathcal{L} - E$ et est défini comme suit

$$\mathcal{L} = \frac{\hbar^2}{2\mu m a} \delta(\rho - a) |\varphi_{II}^{JM\pi}\rangle \left(\frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{L}{\rho} \right) \rho \langle \varphi_{II}^{JM\pi}| \quad (1.60)$$

où L est une constante que nous choisirons égale à zéro par simplicité. En projetant l'équation 1.59 sur $\phi_{II}^{JM\pi}(R^{n'})$, nous obtenons le système

$$\sum_{n=1}^{n_g} (C_{II}^{J\pi})_{n',n}(E) f_{II}^{J\pi}(R^n) = \langle \phi_{II}^{JM\pi}(R^{n'}) | \mathcal{L} | \Psi_{II}^{JM\pi, as} \rangle \quad (1.61)$$

avec

$$(C_{II}^{J\pi})_{n',n}(E) = \langle \phi_{II}^{JM\pi}(R^{n'}) | H + \mathcal{L} - E | \phi_{II}^{JM\pi}(R^n) \rangle_I \quad (1.62)$$

L'indice I signifie que l'intégrale se limite à la région intérieure. En pratique, nous calculons l'élément de matrice sur tout l'espace et retirons la partie provenant du domaine extérieur

$$(C_{II}^{J\pi})_{n',n}(E) = \langle \phi_{II}^{JM\pi}(R^{n'}) | H - E | \phi_{II}^{JM\pi}(R^n) \rangle_{Total} \quad (1.63)$$

$$- \langle \phi_{II}^{JM\pi}(R^{n'}) | H - E | \phi_{II}^{JM\pi}(R^n) \rangle_{as} \quad (1.64)$$

$$+ \langle \phi_{II}^{JM\pi}(R^{n'}) | \mathcal{L} | \phi_{II}^{JM\pi}(R^n) \rangle \quad (1.65)$$

Étant donné qu'à l'extérieur nous pouvons négliger l'antisymétrisation et l'interaction nucléaire, la correction extérieure se réduit à une simple intégration. L'équation de continuité s'écrit

$$g_{II}^{J\pi}(a) = g_{II}^{J\pi,as}(a) \quad (1.66)$$

ou encore

$$\sum_n f_{II}^{J\pi}(R^n) \Gamma_l(a, R^n) = n_l \frac{I_l(ka) - U_{II}^{J\pi} O_l(ka)}{ka} \quad (1.67)$$

Le terme de droite de l'équation 1.61 peut s'écrire

$$n_l \frac{\hbar^2}{2\mu ma} \int_0^\infty \delta(\rho - a) \Gamma_l(\rho, R^{n'}) \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{I_l(k\rho) - U_{II}^{J\pi} O_l(k\rho)}{k\rho} \right) \rho^2 d\rho \quad (1.68)$$

Nous trouvons finalement

$$\langle \phi_{II}^{JM\pi}(R^{n'}) | \mathcal{L} | \Psi_{II}^{JM\pi,as} \rangle = n_l \Gamma_l(a, R^{n'}) \frac{\hbar^2}{2\mu ma} [I'_l(ka) - U_{II}^{J\pi} O'_l(ka)] a^2 \quad (1.69)$$

L'équation 1.61 devient donc

$$\sum_n (C_{II}^{J\pi})_{n',n}(E) f_{II}^{J\pi}(R^n) = n_l \Gamma_l(a, R^{n'}) \frac{\hbar^2 a}{2\mu m} [I'_l(ka) - U_{II}^{J\pi} O'_l(ka)] \quad (1.70)$$

En notant $C_{II}^{J\pi,-1}(E)$ l'inverse de la matrice $C_{II}^{J\pi}(E)$, nous pouvons écrire

$$f_{II}^{J\pi}(R^n) = n_l \frac{\hbar^2 a}{2\mu m} [I'_l(ka) - U_{II}^{J\pi} O'_l(ka)] \sum_{n'} (C_{II}^{J\pi,-1})_{n,n'}(E) \Gamma_l(a, R^{n'}) \quad (1.71)$$

Injectons 1.71 dans 1.67

$$\begin{aligned} \frac{\hbar^2 a}{2\mu m} [I_l'(ka) - U_{II}^{J\pi} O_l'(ka)] \sum_{nn'} \left(C_{II}^{J\pi, -1} \right)_{n, n'}(E) \Gamma_l(a, R^n) \Gamma_l(a, R^{n'}) \\ = \frac{I_l(ka) - U_{II}^{J\pi} O_l(ka)}{ka} \end{aligned} \quad (1.72)$$

Nous pouvons donc déterminer $U_{II}^{J\pi}(E)$

$$U_{II}^{J\pi}(E) = \frac{I_l(ka) - kaR(E) I_l'(ka)}{O_l(ka) - kaR(E) O_l'(ka)} \quad (1.73)$$

où $R(E)$ est la matrice R définie comme suit

$$R(E) = \frac{\hbar^2 a}{2\mu m} \sum_{nn'} \left(C_{II}^{J\pi, -1} \right)_{n, n'}(E) \Gamma_l(a, R^n) \Gamma_l(a, R^{n'}) \quad (1.74)$$

La matrice de collision nous fournit les déphasages et donc toute l'information sur la collision. Nous voyons qu'elle est directement liée aux éléments de matrice 1.62. La difficulté de notre problème réside dans le calcul de ces éléments de matrice ou plus précisément des éléments de matrice 1.63. Nous les expliciterons pour notre système dans le chapitre suivant.

Chapitre 2

Le système $^{14}\text{O} + \text{proton}$

2.1 Les fonctions d'onde

Nous allons construire la fonction d'onde $\phi_{K_1 K_2}^{JM\pi}(R)$ pour notre système. Commençons par exprimer l'ensemble 1.1 pour notre système

$$A_1 = 14 \quad (2.1)$$

$$A_2 = 1 \quad (2.2)$$

$$I_1 = 0 \quad (2.3)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \quad (2.4)$$

$$\pi_1 = + \quad (2.5)$$

$$\pi_2 = + \quad (2.6)$$

où les nombres quantiques de ^{14}O sont ceux de son état fondamental. Remarquons que, pour une valeur de J et π donnée, il n'y a qu'un couple (lI) possible, l et I devant satisfaire les équations 1.2-4. Ceci justifie l'étude au premier chapitre des collisions à une voie.

2.1.1 La fonction d'onde individuelle des nucléons

Comme nous l'avons vu, les deux fonctions d'onde internes sont construites à partir du modèle en couches. Dans le modèle de l'oscillateur harmonique, les énergies des différentes couches augmentent en fonction du nombre quantique principal [7]

$$n = 2n_r + l_N \quad (2.7)$$

où n_r est le nombre de noeuds radiaux et l_N le moment cinétique orbital du mouvement individuel du nucléon. Les fonctions d'onde totale des nucléons

peuvent s'écrire sous la forme d'un produit tensoriel de trois fonctions d'onde

$$|\phi\rangle = |n_r l_N m_{l_N}\rangle \otimes |s m_s\rangle \otimes |t m_t\rangle \quad (2.8)$$

où $|n_r l_N m_{l_N}\rangle$, $|s m_s\rangle$ et $|t m_t\rangle$ représentent respectivement la partie spatiale, le spin et l'isospin du nucléon. Le spin du nucléon valant $\frac{1}{2}$, il y a deux états de spin possibles que nous noterons

$$|\uparrow\rangle = \left| \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right\rangle \quad (2.9)$$

$$|\downarrow\rangle = \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle \quad (2.10)$$

De même, l'isospin du nucléon valant $\frac{1}{2}$, il y a deux états d'isospin possibles que nous noterons

$$|n\rangle = \left| \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right\rangle \quad (2.11)$$

$$|p\rangle = \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle \quad (2.12)$$

La partie spatiale est celle d'une particule plongée dans un potentiel d'oscillateur harmonique de centre \mathbf{R} et de paramètre b , c'est-à-dire

$$\langle \mathbf{r} | \phi_s \rangle = (\pi b^2)^{-3/4} \exp\left(-\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{R})^2}{2b^2}\right) \quad (2.13)$$

pour une orbitale s correspondant aux nombres quantiques $n_r = 0$, $l_N = 0$ et $m_{l_N} = 0$ et

$$\langle \mathbf{r} | \phi_{p_i} \rangle = \frac{\sqrt{2}}{b} (r_i - R_i) \langle \mathbf{r} | \phi_s \rangle \quad (2.14)$$

pour une orbitale p_i ($i = x, y, z$) correspondant aux nombres quantiques $n_r = 0$, $l_N = 1$ et $m_{l_N} = -1, 0, 1$. $L^{14}\text{O}$ possède deux protons et deux neutrons sur une orbitale s et six protons et quatre neutrons sur une orbitale p . La dernière couche de neutrons n'étant pas fermée, nous devrions exprimer la fonction d'onde $\phi_{K_1 K_2}^{\pi_1 \pi_2}(\mathbf{R})$ comme une combinaison linéaire de déterminants de Slater. Nous avons choisi de travailler en couplage jj , dans lequel $L^{14}\text{O}$ a une dernière couche de protons fermée et une dernière sous-couche de neutrons fermée. Nous utilisons pour effectuer ce changement de base, la transformation

$$|l_N s j m\rangle = \sum_{m_{l_N} m_s} (l_N s m_{l_N} m_s | j m) |l_N m_{l_N} s m_s\rangle \quad (2.15)$$

où j et m représentent respectivement le moment cinétique total du nucléon et sa projection. Les coefficients $(l_N s m_{l_N} m_s | j m)$ sont appelés coefficients de Clebsh-Gordan. Nous avons omis le nombre quantique n_r , celui-ci étant toujours nul. Nous noterons $|\varphi_{l_N}^{jm}\rangle$ les états de la nouvelle base

$$|\varphi_s^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}\rangle = |0 \frac{1}{2} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\rangle = |\phi_s \uparrow\rangle \quad (2.16)$$

$$|\varphi_s^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}\rangle = |0 \frac{1}{2} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rangle = |\phi_s \downarrow\rangle \quad (2.17)$$

$$|\varphi_p^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}\rangle = |1 \frac{1}{2} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\rangle = \frac{\sqrt{3}}{3} |\phi_{p_0} \uparrow\rangle - \frac{\sqrt{6}}{3} |\phi_{p_1} \downarrow\rangle \quad (2.18)$$

$$|\varphi_p^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}\rangle = |1 \frac{1}{2} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rangle = \frac{\sqrt{3}}{3} |\phi_{p_0} \downarrow\rangle - \frac{\sqrt{6}}{3} |\phi_{p_1} \uparrow\rangle \quad (2.19)$$

$$|\varphi_p^{\frac{3}{2}+\frac{3}{2}}\rangle = |1 \frac{1}{2} \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\rangle = |\phi_{p_1} \uparrow\rangle \quad (2.20)$$

$$|\varphi_p^{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}\rangle = |1 \frac{1}{2} \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\rangle = \frac{\sqrt{6}}{3} |\phi_{p_0} \uparrow\rangle + \frac{\sqrt{3}}{3} |\phi_{p_1} \downarrow\rangle \quad (2.21)$$

$$|\varphi_p^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}\rangle = |1 \frac{1}{2} \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\rangle = \frac{\sqrt{6}}{3} |\phi_{p_0} \downarrow\rangle + \frac{\sqrt{3}}{3} |\phi_{p_1} \uparrow\rangle \quad (2.22)$$

$$|\varphi_p^{\frac{3}{2}-\frac{3}{2}}\rangle = |1 \frac{1}{2} \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\rangle = |\phi_{p_1} \downarrow\rangle \quad (2.23)$$

2.1.2 Déterminants de Slater

Les états antisymétrisés d'un système de N particules identiques se trouvant dans les états ϕ_k ($k = 1, 2, \dots, N$) s'écrivent

$$\Phi_A = \mathcal{A} \phi_1(1) \phi_2(2) \cdots \phi_N(N) \quad (2.24)$$

où \mathcal{A} est l'opérateur d'antisymétrisation défini au 1.3.2. Ces états sont souvent mis sous forme d'un déterminant appelé déterminant de Slater

$$\Phi_A = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \phi_1(1) & \phi_2(1) & \cdots & \phi_N(1) \\ \phi_1(2) & \phi_2(2) & \cdots & \phi_N(2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1(N) & \phi_2(N) & \cdots & \phi_N(N) \end{vmatrix} \quad (2.25)$$

La fonction d'onde $\Phi_{K_1 K_2}^{\pi_1 \pi_2}(\mathbf{R})$ définie au point 1.3.3 est, dans notre cas, un déterminant de Slater de dimension 15 impliquant 14 fonctions d'onde d'un oscillateur harmonique centré en \mathbf{R}_1 et une fonction d'onde d'un oscillateur harmonique centré en \mathbf{R}_2 . Pour différencier les fonctions d'onde des deux

centres, nous rajoutons l'indice 2 sur la fonction d'onde du proton incident.

$$\Phi_{0K_2}^{++}(\mathbf{R}) = \frac{1}{\sqrt{15!}} \begin{vmatrix} |\varphi_s^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} p(1)\rangle & |\varphi_s^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} p(2)\rangle & \cdots & |\varphi_s^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} p(15)\rangle \\ |\varphi_s^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} p(1)\rangle & |\varphi_s^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} p(2)\rangle & \cdots & |\varphi_s^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} p(15)\rangle \\ |\varphi_p^{\frac{3}{2}+\frac{3}{2}} p(1)\rangle & |\varphi_p^{\frac{3}{2}+\frac{3}{2}} p(2)\rangle & \cdots & |\varphi_p^{\frac{3}{2}+\frac{3}{2}} p(15)\rangle \\ |\varphi_p^{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}} p(1)\rangle & |\varphi_p^{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}} p(2)\rangle & \cdots & |\varphi_p^{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}} p(15)\rangle \\ |\varphi_p^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}} p(1)\rangle & |\varphi_p^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}} p(2)\rangle & \cdots & |\varphi_p^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}} p(15)\rangle \\ |\varphi_p^{\frac{3}{2}-\frac{3}{2}} p(1)\rangle & |\varphi_p^{\frac{3}{2}-\frac{3}{2}} p(2)\rangle & \cdots & |\varphi_p^{\frac{3}{2}-\frac{3}{2}} p(15)\rangle \\ |\varphi_p^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} p(1)\rangle & |\varphi_p^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} p(2)\rangle & \cdots & |\varphi_p^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} p(15)\rangle \\ |\varphi_p^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} p(1)\rangle & |\varphi_p^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} p(2)\rangle & \cdots & |\varphi_p^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} p(15)\rangle \\ |\varphi_s^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} n(1)\rangle & |\varphi_s^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} n(2)\rangle & \cdots & |\varphi_s^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} n(15)\rangle \\ |\varphi_s^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} n(1)\rangle & |\varphi_s^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} n(2)\rangle & \cdots & |\varphi_s^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} n(15)\rangle \\ |\varphi_p^{\frac{3}{2}+\frac{3}{2}} n(1)\rangle & |\varphi_p^{\frac{3}{2}+\frac{3}{2}} n(2)\rangle & \cdots & |\varphi_p^{\frac{3}{2}+\frac{3}{2}} n(15)\rangle \\ |\varphi_p^{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}} n(1)\rangle & |\varphi_p^{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}} n(2)\rangle & \cdots & |\varphi_p^{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}} n(15)\rangle \\ |\varphi_p^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}} n(1)\rangle & |\varphi_p^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}} n(2)\rangle & \cdots & |\varphi_p^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}} n(15)\rangle \\ |\varphi_p^{\frac{3}{2}-\frac{3}{2}} n(1)\rangle & |\varphi_p^{\frac{3}{2}-\frac{3}{2}} n(2)\rangle & \cdots & |\varphi_p^{\frac{3}{2}-\frac{3}{2}} n(15)\rangle \\ |\varphi_{s_2}^{\frac{1}{2}K_2} p(1)\rangle & |\varphi_{s_2}^{\frac{1}{2}K_2} p(2)\rangle & \cdots & |\varphi_{s_2}^{\frac{1}{2}K_2} p(15)\rangle \end{vmatrix}$$

2.1.3 Mouvement du centre de masse

Pour simplifier, nous plaçons l'origine en \mathbf{R}_1 et nous avons donc $\mathbf{R}_2 = \mathbf{R}$. Nous pouvons écrire le déterminant $\Phi_{0K_2}^{++}(\mathbf{R})$ sous la forme 2.24

$$\Phi_{0K_2}^{++}(\mathbf{R}) = \mathcal{A} \cdots \exp\left(-\frac{\mathbf{r}_{1,1}^2}{2b^2}\right) \cdots \exp\left(-\frac{\mathbf{r}_{1,14}^2}{2b^2}\right) \cdots \exp\left(-\frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{R})^2}{2b^2}\right) \quad (2.26)$$

où nous n'avons explicité que le produit d'exponentielles, celui-ci comprenant la partie qui nous intéresse dans ce chapitre. Nous pouvons réécrire 2.26 sous la forme

$$\Phi_{0K_2}^{++}(\mathbf{R}) = \mathcal{A} \mathcal{A}_1 \cdots \exp\left(-\frac{\mathbf{r}_{1,1}^2}{2b^2}\right) \cdots \exp\left(-\frac{\mathbf{r}_{1,14}^2}{2b^2}\right) \cdots \exp\left(-\frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{R})^2}{2b^2}\right) \quad (2.27)$$

où \mathcal{A}_1 est l'opérateur d'antisymétrisation agissant sur les coordonnées des nucléons appartenant au noyau 1. Dans le système de coordonnées défini au

1.1, on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_1 \cdots \exp\left(-\frac{\mathbf{r}_{1,1}^2}{2b^2}\right) \cdots \exp\left(-\frac{\mathbf{r}_{1,14}^2}{2b^2}\right) &= \mathcal{A}_1 \cdots \exp\left(-\frac{(\boldsymbol{\xi}_{1,1} + \mathbf{R}_{cm,1})^2}{2b^2}\right) \cdots \\
&\quad \times \cdots \exp\left(-\frac{(\boldsymbol{\xi}_{1,14} + \mathbf{R}_{cm,1})^2}{2b^2}\right) \\
&= \mathcal{A}_1 \cdots \exp\left(-\frac{\boldsymbol{\xi}_{1,1}^2 + \cdots + \boldsymbol{\xi}_{1,14}^2 + 14R_{cm,1}^2}{2b^2}\right) \\
&= \mathcal{A}_1 \cdots \exp\left(-\frac{\boldsymbol{\xi}_{1,1}^2 + \cdots + \boldsymbol{\xi}_{1,14}^2}{2b^2}\right) \exp\left(-\frac{14R_{cm,1}^2}{2b^2}\right)
\end{aligned} \tag{2.28}$$

$$\begin{aligned}
\exp\left(-\frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{R})^2}{2b^2}\right) &= \exp\left(-\frac{(\mathbf{R}_{cm,2} - \mathbf{R})^2}{2b^2}\right) \\
&= \exp\left(-\frac{R_{cm,2}^2 + R^2 - 2\mathbf{R}\mathbf{R}_{cm,2}}{2b^2}\right)
\end{aligned} \tag{2.29}$$

où nous avons utilisé les égalités

$$\sum_{i=1}^{14} \boldsymbol{\xi}_{1,i} = 0 \tag{2.30}$$

$$\boldsymbol{\xi}_2 = 0 \tag{2.31}$$

En injectant 2.28 et 2.29 dans 2.27 et en utilisant le théorème de Bethe-Rose [13], nous trouvons

$$\Phi_{0K_2}^{++}(\mathbf{R}) = C'' \mathcal{A} \phi_{00}^+(\boldsymbol{\xi}_1) \exp\left(-\frac{14R_{cm,1}^2}{2b^2}\right) \phi_{\frac{1}{2}K_2}^+(\boldsymbol{\xi}_2) \exp\left(-\frac{R_{cm,2}^2 + R^2 - 2\mathbf{R}\mathbf{R}_{cm,2}}{2b^2}\right) \tag{2.32}$$

où $\phi_{00}^+(\boldsymbol{\xi}_1)$ et $\phi_{\frac{1}{2}K_2}^+(\boldsymbol{\xi}_2)$ sont les fonctions d'onde internes de l' ^{14}O et du proton, définies au point 1.3.1. Intéressons-nous au produit d'exponentielles apparaissant dans 2.32,

$$\exp\left(-\frac{14R_{cm,1}^2}{2b^2}\right) \exp\left(-\frac{R_{cm,2}^2 + R^2 - 2\mathbf{R}\mathbf{R}_{cm,2}}{2b^2}\right) \tag{2.33}$$

Avec les égalités 1.5-7 et 1.10, nous avons

$$\mathbf{R}_{cm,1} = \mathbf{R}_{cm} - \frac{1}{15}\boldsymbol{\rho} \tag{2.34}$$

$$\mathbf{R}_{cm,2} = \frac{14}{15}\boldsymbol{\rho} + \mathbf{R}_{cm} \tag{2.35}$$

Injectons ces égalités dans l'exponentielle 2.33, nous trouvons

$$\exp\left(-\frac{15R_{cm}^2 + \frac{14}{15}\boldsymbol{\rho}^2 + R^2 - 2\frac{14}{15}\mathbf{R}\boldsymbol{\rho} - 2\mathbf{R}\mathbf{R}_{cm}}{2b^2}\right) \quad (2.36)$$

ou de manière équivalente

$$\exp\left(-\frac{\frac{14}{15}(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{R})^2}{2b^2}\right) \exp\left(-\frac{15(\mathbf{R}_{cm} - \frac{1}{15}\mathbf{R})^2}{2b^2}\right) \quad (2.37)$$

Nous pouvons donc écrire 2.32 sous la forme 1.51,

$$\Phi_{0K_2}^{++}(\mathbf{R}) = C' \phi_{cm}(\mathbf{R}_{cm} - \mathbf{S}) \mathcal{A} \phi_{00}^+(\boldsymbol{\xi}_1) \phi_{\frac{1}{2}K_2}^+(\boldsymbol{\xi}_2) \Gamma(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{R}) \quad (2.38)$$

avec

$$\phi_{cm}(\mathbf{R}_{cm} - \mathbf{S}) = \left(\frac{15}{\pi b^2}\right)^{3/4} \exp\left(-\frac{15(\mathbf{R}_{cm} - \mathbf{S})^2}{2b^2}\right) \quad (2.39)$$

$$\Gamma(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{R}) = \left(\frac{14}{15\pi b^2}\right)^{3/4} \exp\left(-\frac{\mu(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{R})^2}{2b^2}\right) \quad (2.40)$$

où

$$\mathbf{S} = \frac{1}{15}\mathbf{R} \quad (2.41)$$

2.1.4 Projection sur le moment cinétique total et la parité

L'équation 1.55 s'écrit pour notre système

$$\phi_{0K_2}^{JM\pi}(R) = \frac{1}{2}(1 + \pi\Pi) \int D_{MK_2}^{J*}(\Omega) \mathcal{R}(\Omega) \phi_{0K_2}^{++}(\mathbf{R}) d\Omega \quad (2.42)$$

L'opérateur de rotation $\mathcal{R}(\Omega)$ est associé au moment cinétique total \mathbf{J} . Nous pouvons décomposer cette rotation en une rotation dont le générateur est le spin de voie \mathbf{I} et une rotation dont le générateur est le moment cinétique orbital \mathbf{l} du mouvement relatif, ce qui s'écrit

$$\mathcal{R}(\Omega) = \mathcal{R}^I(\Omega) \mathcal{R}^l(\Omega) \quad (2.43)$$

Effectuons la rotation de spin afin de simplifier l'expression 2.42. En utilisant pour \mathcal{R}^I la loi de transformation des états $|JM\rangle$

$$\mathcal{R}^J(\Omega) |JM\rangle = \sum_{M'} D_{M'M}^J(\Omega) |JM'\rangle \quad (2.44)$$

avec $J = \frac{1}{2}$, le spin de voie de notre système valant $\frac{1}{2}$, nous pouvons écrire l'intégrand de 2.42 sous la forme

$$(-)^{M-K_2} \sum_{K'=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} D_{-M-K_2}^J(\Omega) D_{K'K_2}^{\frac{1}{2}}(\Omega) \mathcal{R}^l(\Omega) \phi_{0K'}^{++}(\mathbf{R}) \quad (2.45)$$

où nous avons utilisé l'égalité

$$D_{M'M}^J{}^*(\Omega) = (-)^{M'-M} D_{-M'-M}^J(\Omega) \quad (2.46)$$

Le produit de deux matrices de Wigner peut se décomposer en une somme de matrices de Wigner, la formule de décomposition s'écrit

$$\begin{aligned} D_{M'_1M_1}^{J_1}(\Omega) D_{M'_2M_2}^{J_2}(\Omega) &= \sum_J (J_1 J_2 M'_1 M'_2 | J M'_1 + M'_2) \\ &\quad \times (J_1 J_2 M_1 M_2 | J M_1 + M_2) D_{M'_1+M'_2, M_1+M_2}^J(\Omega) \end{aligned} \quad (2.47)$$

Appliquons cette formule au produit $D_{-M-K_2}^J(\Omega) D_{K'K_2}^{\frac{1}{2}}(\Omega)$, , 2.45 devient

$$\begin{aligned} (-)^{M-K_2} \sum_{K'=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sum_{l=J-\frac{1}{2}}^{J+\frac{1}{2}} (J_1/2 - MK' | l - m) (J_1/2 - K_2 K_2 | l 0) \\ \times D_{-m0}^l(\Omega) \mathcal{R}^l(\Omega) \phi_{0K'}^{++}(\mathbf{R}) \end{aligned} \quad (2.48)$$

où m' est la projection du moment cinétique orbital et où nous avons tenu compte de l'égalité $M = m' + K'$. La projection sur la parité a pour conséquence d'éliminer la somme sur l , celui-ci devant satisfaire l'égalité 1.4. Nous pouvons donc finalement écrire la fonction d'onde 2.42 sous la forme

$$\begin{aligned} \phi_{0K_2}^{JM\pi}(R) &= \int \sum_{K'=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (-)^{K'-K_2} (J_1/2 - MK' | l - m') \\ &\quad \times (J_1/2 - K_2 K_2 | l 0) D_{m'0}^l{}^*(\Omega) \mathcal{R}^l(\Omega) \phi_{0K'}^{++}(\mathbf{R}) d\Omega \end{aligned} \quad (2.49)$$

Remarquons la présence d'un opérateur de projection sur le moment cinétique orbital \mathbf{l}

$$\mathbf{P}_{0m'}^l = \int D_{m'0}^l{}^*(\Omega) \mathcal{R}^l(\Omega) d\Omega. \quad (2.50)$$

Notons $\psi_{m',K'}^l(R)$ les états propres projetés définis comme suit

$$\psi_{m',K'}^l(R) = \mathbf{P}_{0m'}^l \phi_{0K'}^{++}(\mathbf{R}) \quad (2.51)$$

Ils satisfont les égalités

$$\mathbf{1}^2 |\psi_{m',K'}^l(R)\rangle = l(l+1) |\psi_{m',K'}^l(R)\rangle \quad (2.52)$$

$$l_z |\psi_{m',K'}^l(R)\rangle = m' |\psi_{m',K'}^l(R)\rangle \quad (2.53)$$

Les déterminants de Slater projetés sur le moment cinétique total \mathbf{J} peuvent donc s'écrire sous la forme d'une combinaison linéaire de déterminants de Slater projetés sur le moment cinétique orbital $\mathbf{1}$. Réécrivons 2.49 sous la forme

$$\begin{aligned} \phi_{0K_2}^{JM\pi}(R) &= \sum_{K'=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (-)^{K'-K_2} (J1/2 - MK'|l - m') \\ &\times (J1/2 - K_2K_2|l0) \psi_{m',K'}^l(R) \end{aligned} \quad (2.54)$$

2.2 Les éléments de matrice

2.2.1 Éléments de matrice du Hamiltonien

Comme nous l'avons vu au point 1.4, la matrice de collision dépend des éléments de matrice du Hamiltonien dans la base (lI) . En utilisant 1.57 et 2.54 nous pouvons montrer que ces éléments de matrice sont une combinaison linéaire des éléments de matrice suivant

$$\langle \psi_{m,K}^l(R) | H | \psi_{m',K'}^l(R') \rangle \quad (2.55)$$

avec

$$|\psi_{m',K'}^l(R')\rangle = \int D_{m'0}^{l*}(\Omega'') \mathcal{R}^l(\Omega'') |\phi_{0K'}^{++}(\mathbf{R}')\rangle d\Omega'' \quad (2.56)$$

$$\langle \psi_{m,K}^l(R) | = \int D_{m0}^l(\Omega') \langle \phi_{0K}^{++}(\mathbf{R}) | \mathcal{R}^l(-\Omega') d\Omega' \quad (2.57)$$

avec

$$\mathbf{R} = R1_{c_1c_2} \quad (2.58)$$

$$\mathbf{R}' = R'1_{c_1c_2} \quad (2.59)$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} \langle \psi_{m,K}^l(R) | H | \psi_{m',K'}^l(R') \rangle &= \int \int D_{m0}^l(\Omega') D_{m'0}^{l*}(\Omega'') \\ &\times \langle \phi_{0K}^{++}(\mathbf{R}) | \mathcal{R}^l(-\Omega') H \mathcal{R}^l(\Omega'') | \phi_{0K'}^{++}(\mathbf{R}') \rangle d\Omega' d\Omega'' \end{aligned} \quad (2.60)$$

Comme le Hamiltonien est invariant par rotation, nous avons

$$\mathcal{R}^l(-\Omega') H \mathcal{R}^l(\Omega'') = H \mathcal{R}^l(-\Omega') \mathcal{R}^l(\Omega'') = H \mathcal{R}^l(\Omega) \quad (2.61)$$

où $\mathcal{R}^l(\Omega)$ est la rotation résultante de la composition des deux rotations $\mathcal{R}^l(-\Omega')$ et $\mathcal{R}^l(\Omega'')$, ce qui s'écrit

$$\mathcal{R}^l(\Omega) = \mathcal{R}^l(-\Omega') \mathcal{R}^l(\Omega'') \quad (2.62)$$

ou encore

$$\mathcal{R}^l(\Omega'') = \mathcal{R}^l(\Omega') \mathcal{R}^l(\Omega) \quad (2.63)$$

Nous pouvons décomposer de la même manière l'élément de matrice de Wigner

$$D_{m'0}^{l*}(\Omega'') = \sum_n D_{m'n}^{l*}(\Omega') D_{n0}^{l*}(\Omega) \quad (2.64)$$

L'élément de matrice 2.60 devient

$$\begin{aligned} \langle \psi_{m,K}^l(R) | H | \psi_{m',K'}^l(R') \rangle &= \int \int \sum_n D_{m0}^l(\Omega') D_{m'n}^{l*}(\Omega') D_{n0}^{l*}(\Omega) \\ &\times \langle \phi_{0K}^{++}(\mathbf{R}) | H \mathcal{R}^l(\Omega) | \phi_{0K'}^{++}(\mathbf{R}') \rangle d\Omega' d\Omega \end{aligned} \quad (2.65)$$

En utilisant la relation d'orthogonalité des matrices de Wigner

$$\int D_{M_1 M_1}^{J_1}(\Omega) D_{M_2' M_2}^{J_2}(\Omega) d\Omega = \delta_{J_1 J_2} \delta_{M_1 M_2'} \delta_{M_1 M_2} \frac{8\pi^2}{2J_1 + 1} \quad (2.66)$$

nous pouvons écrire

$$\int D_{m0}^l(\Omega') D_{m'n}^{l*}(\Omega') d\Omega' = \delta_{mm'} \delta_{0n} \frac{8\pi^2}{2l + 1} \quad (2.67)$$

Nous nous intéresserons donc dorénavant aux éléments de matrice

$$\begin{aligned} \langle \psi_{m,K}^l(R) | H | \psi_{m,K}^l(R') \rangle &= \\ \frac{8\pi^2}{2l + 1} \int D_{00}^l(\Omega) \langle \phi_{0K}^{++}(\mathbf{R}) | H \mathcal{R}^l(\Omega) | \phi_{0K}^{++}(\mathbf{R}') \rangle &d\Omega \end{aligned} \quad (2.68)$$

Explicitons les angles d'Euler (α, β, γ) réunis sous le sigle Ω . Nous avons

$$\mathcal{R}^l(\alpha, \beta, \gamma) = e^{i\alpha l_z} e^{i\beta l_y} e^{i\gamma l_z} \quad (2.69)$$

$$D_{00}^l = d_{00}^l(\beta) = P_l(\cos \beta) \quad (2.70)$$

$$d\Omega = d\alpha d\gamma \sin \beta d\beta \quad (2.71)$$

où P_l est le polynôme de Legendre d'ordre l [4]. Le choix des axes étant arbitraire, nous prenons \mathbf{R} et \mathbf{R}' suivant l'axe z

$$\mathbf{R} = R1_z \quad (2.72)$$

$$\mathbf{R}' = R'1_z \quad (2.73)$$

ce qui introduit une symétrie cylindrique autour de l'axe z . Il en découle les égalités suivantes

$$l_z |\phi_{0K}^{++}(R1_z)\rangle = 0 \quad (2.74)$$

$$e^{i\alpha l_z} |\phi_{0K}^{++}(R1_z)\rangle = |\phi_{0K}^{++}(R1_z)\rangle \quad (2.75)$$

$$m = 0 \quad (2.76)$$

quels que soient α et R . Nous en déduisons

$$\begin{aligned} \langle \phi_{0K}^{++}(R1_z) | H \mathcal{R}^l(\Omega) | \phi_{0K}^{++}(R'1_z) \rangle \\ = \langle \phi_{0K}^{++}(R1_z) | H e^{i\alpha l_z} e^{i\beta l_y} e^{i\gamma l_z} | \phi_{0K}^{++}(R'1_z) \rangle \\ = \langle \phi_{0K}^{++}(R1_z) | e^{i\alpha l_z} H e^{i\beta l_y} | \phi_{0K}^{++}(R'1_z) \rangle \\ = \langle \phi_{0K}^{++}(R1_z) | H e^{i\beta l_y} | \phi_{0K}^{++}(R'1_z) \rangle \end{aligned} \quad (2.77)$$

où nous avons tenu compte de l'invariance du Hamiltonien par rotation. Après avoir effectué les intégrations sur les angles α et γ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \langle \psi_{0,K}^l(R) | H | \psi_{0,K}^l(R') \rangle = \frac{32\pi^4}{2l+1} \int_{-1}^1 P_l(\cos\beta) \\ \times \langle \phi_{0K}^{++}(R1_z) | H e^{i\beta l_y} | \phi_{0K}^{++}(R'1_z) \rangle d(\cos\beta) \end{aligned} \quad (2.78)$$

Cette expression peut encore être simplifiée par le fait que les fonctions d'onde des nucléons étant construites à l'aide de fonctions d'onde de l'oscillateur harmonique, la rotation associée à l des 15 nucléons équivaut à la rotation inverse de la coordonnée génératrice

$$\mathcal{R}^l(\Omega) |\psi(\mathbf{R})\rangle = |\psi(\mathcal{R}^l(\Omega)^{-1}\mathbf{R})\rangle \quad (2.79)$$

Nous trouvons donc finalement avec 1.57, 2.54 et 2.78 et 2.79 [5].

$$\begin{aligned} \langle \phi_{l\frac{1}{2}}^{JM\pi}(R) | H | \phi_{l\frac{1}{2}}^{JM\pi}(R') \rangle = C \sum_{K=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (01/20K|1/2K) (l1/20K|JK) \\ \times \int_{-1}^1 P_l(\cos\theta_{\mathbf{R}'}) \langle \phi_{0K}^{++}(R1_z) | H | \phi_{0K}^{++}(\mathbf{R}') \rangle d(\cos\theta_{\mathbf{R}'}) \end{aligned} \quad (2.80)$$

2.2.2 Correction du centre de masse

Nous avons calculé jusqu'ici les éléments de matrice à partir des fonctions d'onde internes du système. En pratique, il est plus facile de les calculer à partir de la fonction d'onde totale et de retirer ensuite la contribution du centre de masse. Le Hamiltonien peut se décomposer de la façon suivante.

$$H = H_{int} + T_{cm} \quad (2.81)$$

où H_{int} est le Hamiltonien interne décrivant le mouvement interne du système et T_{cm} est l'énergie cinétique du centre de masse définie comme suit

$$T_{cm} = \frac{\mathbf{P}_{cm}^2}{2M} \quad (2.82)$$

où \mathbf{P}_{cm} est la quantité de mouvement du centre de masse et M est la masse totale du système. Décrivons par ψ , ψ_{int} et ψ_{cm} les fonctions d'onde totales, internes et du centre de masse, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \langle \psi | H | \psi' \rangle &= \langle \psi | H_{int} | \psi' \rangle + \langle \psi | T_{cm} | \psi' \rangle \\ &= \langle \psi_{int} | H_{int} | \psi'_{int} \rangle \langle \psi_{cm} | \psi'_{cm} \rangle \\ &\quad + \langle \psi_{cm} | T_{cm} | \psi'_{cm} \rangle \langle \psi_{int} | \psi'_{int} \rangle \end{aligned} \quad (2.83)$$

ce qui donne finalement

$$\langle \psi_{int} | H_{int} | \psi'_{int} \rangle = \frac{\langle \psi | H | \psi' \rangle - \langle \psi_{cm} | T_{cm} | \psi'_{cm} \rangle \langle \psi_{int} | \psi'_{int} \rangle}{\langle \psi_{cm} | \psi'_{cm} \rangle} \quad (2.84)$$

2.2.3 Exemple : le produit scalaire

Nous appliquons le développement des chapitres précédents au produit scalaire dans la base (lI), dont dépend aussi la matrice de collision. Notons ϕ_{1i} ($i = 1, \dots, 14$) les fonctions d'onde individuelles des nucléons appartenant à l' ^{14}O et ϕ_2 la fonction d'onde du proton, définies par 2.8. Les fonctions d'onde ϕ_{1i} sont normalisées et orthogonales entre elles mais pas à ϕ_2 . Pour faciliter les calculs, nous rendons ϕ_2 orthogonale aux ϕ_{1i} , soit $\tilde{\phi}_2$ la fonction orthogonale, nous avons

$$|\tilde{\phi}_2\rangle = |\phi_2\rangle - \sum_{i=1}^{14} \langle \phi_{1i} | \phi_2 \rangle |\phi_{1i}\rangle \quad (2.85)$$

Le produit scalaire en base orthogonale de deux déterminants de Slater s'écrit

$$\begin{aligned}
\langle \Phi_{0K_2}^{++}(\mathbf{R}') | \Phi_{0K_2}^{++}(\mathbf{R}) \rangle &= \prod_{i=1}^{14} \langle \phi_{1i} | \phi_{1i} \rangle \langle \tilde{\phi}_2(\mathbf{R}') | \tilde{\phi}_2(\mathbf{R}) \rangle \\
&= 1 \cdots 1 \langle \tilde{\phi}_2(\mathbf{R}') | \tilde{\phi}_2(\mathbf{R}) \rangle \\
&= \langle \phi_2 | \phi_2 \rangle - \sum_{i=1}^{14} \langle \phi_2(\mathbf{R}') | \phi_{1i} \rangle \langle \phi_{1i} | \phi_2(\mathbf{R}) \rangle
\end{aligned} \tag{2.86}$$

En utilisant les égalités,

$$\langle \phi_s(\mathbf{R}') | \phi_s(\mathbf{R}) \rangle = \exp\left(-\frac{(\mathbf{R} - \mathbf{R}')^2}{4b^2}\right) \tag{2.87}$$

$$\langle \phi_{p_i}(0) | \phi_s(\mathbf{R}) \rangle = \frac{\sqrt{2}}{2b} R_i \exp\left(-\frac{R^2}{4b^2}\right) \tag{2.88}$$

2.86 devient, pour $K_2 = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
\langle \Phi_{0\frac{1}{2}}^{++}(\mathbf{R}') | \Phi_{0\frac{1}{2}}^{++}(\mathbf{R}) \rangle &= \exp\left(-\frac{(\mathbf{R} - \mathbf{R}')^2}{4b^2}\right) - \exp\left(-\frac{R^2 + R'^2}{4b^2}\right) \\
&\quad - \left(\frac{\sqrt{6}\sqrt{2}}{3 \cdot 2b}\right)^2 R_y R'_y \exp\left(-\frac{R^2 + R'^2}{4b^2}\right) \\
&\quad - \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{3 \cdot 2b}\right)^2 R_x R'_x \exp\left(-\frac{R^2 + R'^2}{4b^2}\right) \\
&\quad - \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{3 \cdot 2b}\right)^2 R_y R'_y \exp\left(-\frac{R^2 + R'^2}{4b^2}\right) \\
&\quad - \left(\frac{\sqrt{6}\sqrt{2}}{3 \cdot 2b}\right)^2 R_x R'_x \exp\left(-\frac{R^2 + R'^2}{4b^2}\right) \\
&\quad - \left(\frac{\sqrt{2}}{2b}\right)^2 R_z R'_z \exp\left(-\frac{R^2 + R'^2}{4b^2}\right) \\
&= \exp\left(-\frac{(\mathbf{R} - \mathbf{R}')^2}{4b^2}\right) - \left(1 + \frac{\mathbf{R}\mathbf{R}'}{2b^2}\right) \exp\left(-\frac{R^2 + R'^2}{4b^2}\right)
\end{aligned} \tag{2.89}$$

de même, pour $K_2 = -\frac{1}{2}$, nous avons

$$\langle \Phi_{0-\frac{1}{2}}^{++}(\mathbf{R}') | \Phi_{0-\frac{1}{2}}^{++}(\mathbf{R}) \rangle = \exp\left(-\frac{(\mathbf{R} - \mathbf{R}')^2}{4b^2}\right) - \left(1 + \frac{\mathbf{R}\mathbf{R}'}{2b^2}\right) \exp\left(-\frac{R^2 + R'^2}{4b^2}\right) \quad (2.90)$$

Nous devons maintenant retirer la contribution du centre de masse, avec 2.39 et 2.87, nous trouvons

$$\langle \phi_{cm}(\mathbf{R}') | \phi_{cm}(\mathbf{R}) \rangle = \exp\left(-\frac{1}{15} \frac{(\mathbf{R} - \mathbf{R}')^2}{4b^2}\right) \quad (2.91)$$

et donc en injectant 2.90 et 2.91 dans 2.84, nous avons finalement

$$\begin{aligned} \langle \phi_{0K_2}^{++}(\mathbf{R}') | \phi_{0K_2}^{++}(\mathbf{R}) \rangle &= \exp\left(-\frac{14R^2 + R'^2}{15 \cdot 4b^2}\right) \\ &\times \left(\exp\left(\frac{14\mathbf{R}\mathbf{R}'}{15 \cdot 2b^2}\right) - \exp\left(-\frac{1\mathbf{R}\mathbf{R}'}{15 \cdot 2b^2}\right) - \frac{\mathbf{R}\mathbf{R}'}{2b^2} \exp\left(-\frac{1\mathbf{R}\mathbf{R}'}{15 \cdot 2b^2}\right) \right) \end{aligned} \quad (2.92)$$

où nous avons factorisé la partie indépendante de θ . Injectons ce produit scalaire dans l'équation 2.80, en utilisant les propriétés des polynômes de Legendre suivantes

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \frac{2\delta_{nm}}{2n+1} \quad (2.93)$$

$$xP_n(x) = \frac{(l+1)P_{n+1}(x) + lP_{n-1}(x)}{2l+1} \quad (2.94)$$

et les égalités

$$\mathbf{R}\mathbf{R}' = RR' \cos \theta \quad (2.95)$$

$$\exp(\mathbf{R}\mathbf{R}') = \sum_{l'=0}^{\infty} (2l'+1) P_{l'}(\cos \theta) i_{l'}(RR') \quad (2.96)$$

$$\exp(-\mathbf{R}\mathbf{R}') = \sum_{l'=0}^{\infty} (-)^{l'} (2l'+1) P_{l'}(\cos \theta) i_{l'}(RR') \quad (2.97)$$

nous obtenons

$$\langle \phi_{l\frac{1}{2}}^{JM\pi}(R) | \phi_{l\frac{1}{2}}^{JM\pi}(R') \rangle = C(l1/201/2|J1/2) \exp\left(-\frac{14R^2 + R'^2}{15 \cdot 4b^2}\right) \Lambda_l\left(\frac{RR'}{2b^2}\right)$$

avec

$$\begin{aligned} \Lambda_l\left(\frac{RR'}{2b^2}\right) &= i_l\left(\frac{14RR'}{15 \cdot 2b^2}\right) - (-)^l i_l\left(\frac{1RR'}{15 \cdot 2b^2}\right) - (-)^{l+1} \frac{l+1}{2l+1} i_{l+1}\left(\frac{1RR'}{15 \cdot 2b^2}\right) \frac{RR'}{2b^2} \\ &+ (-)^{l-1} \frac{l}{2l+1} i_{l-1}\left(\frac{1RR'}{15 \cdot 2b^2}\right) \frac{RR'}{2b^2} \end{aligned} \quad (2.98)$$

Chapitre 3

Déphasages et sections efficaces du système $^{14}\text{O} + \text{proton}$

3.1 Les potentiels nucléon-nucléon

3.1.1 Le potentiel central

Nous utiliserons dans nos calculs deux potentiels centraux effectifs : le potentiel de Volkov [14] et le potentiel du Minnesota [15]. Toutes les énergies seront données en MeV et toutes les longueurs en fm.

Le potentiel de Volkov

Le potentiel de Volkov est ajusté sur les propriétés physiques de la particule α et sur le noyau d' ^{16}O . Il donne une valeur satisfaisante de leur énergie et de leur rayon. Il est de la forme

$$\begin{aligned} V_{ij} = & 61.14 (1 - m - mP^\sigma P^\tau) \exp\left(-\frac{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2}{(1.01)^2}\right) \\ & - 60.65 (1 - m - mP^\sigma P^\tau) \exp\left(-\frac{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2}{(1.80)^2}\right) \end{aligned} \quad (3.1)$$

où m est un paramètre que nous devons ajuster. Sa valeur standard est $m = 0.6$. Les constantes, introduites au point 1.2, du Potentiel de Volkov sont reprises dans le tableau 3.1.

Le potentiel du Minnesota

Le potentiel du Minnesota est ajusté sur les propriétés de l'interaction nucléon-nucléon à basse énergie et sur la diffusion élastique α - α . Il est de la

k	V_k	μ_k	W_k	M_k	B_k	H_k
1	61.14	1.01	1 - m	m	0	0
2	-60.65	1.80	1 - m	m	0	0

TAB. 3.1 – Constantes du potentiel de Volkov

forme

$$\begin{aligned}
V_{ij} = & 200 (0.5u - (1 - 0.5u) P^\sigma P^\tau) \exp\left(-\frac{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2}{(0.820)^2}\right) \\
& - 178 (0.25u - (0.5 - 0.25u) P^\sigma P^\tau + 0.25u P^\sigma - (0.5 - 0.25u) P^\tau) \\
& \times \exp\left(-\frac{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2}{(1.250)^2}\right) \\
& - 91.85 (0.25u - (0.5 - 0.25u) P^\sigma P^\tau - 0.25u P^\sigma + (0.5 - 0.25u) P^\tau) \\
& \times \exp\left(-\frac{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2}{(1.466)^2}\right) \tag{3.2}
\end{aligned}$$

où u est un paramètre qu'il faudra ajuster. Sa valeur standard est $u = 1.0$. Les constantes du potentiel du Minnesota sont données dans le tableau 3.2.

k	V_k	μ_k	W_k	M_k	B_k	H_k
1	200	0.820	0.5u	1 - 0.5u	0	0
2	-178.0	1.250	0.25u	0.5 - 0.25u	0.25u	0.5 - 0.25u
3	-91.85	1.466	0.25u	0.5 - 0.25u	-0.25u	-0.5 + 0.25u

TAB. 3.2 – Constantes du potentiel du Minnesota

3.1.2 Le potentiel spin-orbite

La forme du potentiel spin-orbite est donnée par 1.25. Le paramètre S_0 peut prendre les valeurs $S_0 = 20$ à 50 MeV fm⁵

3.2 Le paramètre de l'oscillateur

Le paramètre de l'oscillateur le plus approprié est celui qui minimise l'énergie de liaison du noyau. Pour l'¹⁴O, nous trouvons

$$b = 1.60$$

3.3 États liés

Afin de trouver le potentiel le mieux adapté à notre système, nous ajustons les paramètres pour reproduire les niveaux d'énergie des états liés de notre système.

3.3.1 Principe de calcul

Nous utilisons la base GCM comme fonctions d'essai dans un calcul variationnel. Injectons la forme discrétisée 1.58 de 1.48 dans l'équation de Schrödinger. En projetant sur les fonctions d'onde 1.46, nous trouvons les équations

$$\sum_{n=1}^{n_g} \left(H_{l\frac{1}{2}}^{J\pi}(R^{n'}, R^n) - EN_{l\frac{1}{2}}^{J\pi}(R^{n'}, R^n) \right) f_{l\frac{1}{2}}^{J\pi} = 0 \quad (3.3)$$

avec

$$H_{l\frac{1}{2}}^{J\pi}(R^{n'}, R^n) = \langle \phi_{l\frac{1}{2}}^{JM\pi}(R^{n'}) | H | \phi_{l\frac{1}{2}}^{JM\pi}(R^n) \rangle \quad (3.4)$$

$$N_{l\frac{1}{2}}^{J\pi}(R^{n'}, R^n) = \langle \phi_{l\frac{1}{2}}^{JM\pi}(R^{n'}) | \phi_{l\frac{1}{2}}^{JM\pi}(R^n) \rangle \quad (3.5)$$

Ces deux dernières expressions sont données par 2.80. Les valeurs propres de ce système nous fournissent une borne supérieure des énergies des états liés.

3.3.2 Les états liés du ^{15}C

Le ^{15}F étant instable en protons, nous utilisons la propriété d'indépendance de charge du potentiel nucléaire et ajustons les paramètres par rapport aux états liés du noyau miroir, le ^{15}C . Les énergies et nombres quantiques de ces états sont repris dans le tableau 3.3.

$J\pi$	E (MeV)
$3/2^-$	4.66
$5/2^-$	4.220
$1/2^-$	3.103
$^{14}\text{C} + \text{n}$	0
$5/2^+$	-0.478
$1/2^+$	-1.2181

TAB. 3.3 – Niveaux du ^{15}C [8]

Ajustement du potentiel de Volkov

Nous prenons pour les paramètres les valeurs suivantes

$$\begin{aligned} m &= 0.5851 \\ S_0 &= 24.56 \end{aligned}$$

Nous trouvons les états liés

$$\begin{aligned} E_{1/2^+} &= -1.218 \\ E_{5/2^+} &= -0.478 \end{aligned}$$

Ajustement du potentiel du Minnesota

Nous prenons pour les paramètres les valeurs suivantes

$$\begin{aligned} u &= 0.9302 \\ S_0 &= 34.98 \end{aligned}$$

Nous trouvons les états liés

$$\begin{aligned} E_{1/2^+} &= -1.217 \\ E_{5/2^+} &= -0.478 \end{aligned}$$

3.4 Déphasages et sections efficaces

La diffusion élastique $^{14}\text{O} + \text{proton}$ est caractérisée par la section efficace différentielle [6]

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sum_{K=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sum_{K'=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |q_{K,K'}|^2 \quad (3.6)$$

avec

$$\begin{aligned} q_{K,K'} &= i\pi^{\frac{1}{2}} k^{-1} \sum_{J=0}^{\infty} \sum_{\pi} (2l+1) e^{i\sigma_0} (l1/20K|JK) (l1/2K - K'K'|JK) \\ &\quad \times (1 - U_{l\frac{1}{2}}^{J\pi}) Y_l^{K-K'}(\Omega_\rho) \end{aligned} \quad (3.7)$$

où $Y_l^{K-K'}$ est une harmonique sphérique [4]. Nous pouvons écrire la matrice de collision sous la forme

$$U_{l\frac{1}{2}}^{J\pi} = e^{2i\delta_{l\frac{1}{2}}^J} \quad (3.8)$$

où $\delta_{l\frac{1}{2}}^J$ est le déphasage. Il introduit l'effet du potentiel d'interaction dans l'onde diffusée. Le terme σ_0 introduit dans 3.7 est le déphasage coulombien défini par 1.40. Nous omettrons dorénavant l'indice $l\frac{1}{2}$ dans l'expression du déphasage.

3.4.1 Diffusion $^{14}\text{C} + \text{neutron}$

Nous avons ajusté les paramètres sur les états liés du ^{15}C et il est donc intéressant d'étudier les états de diffusion du système $^{14}\text{C} + \text{neutron}$. Les figures 3.1-4 représentent les déphasages des différentes ondes partielles pour la diffusion $^{14}\text{C} + \text{neutron}$, pour des énergies allant de 0 à 9 MeV.

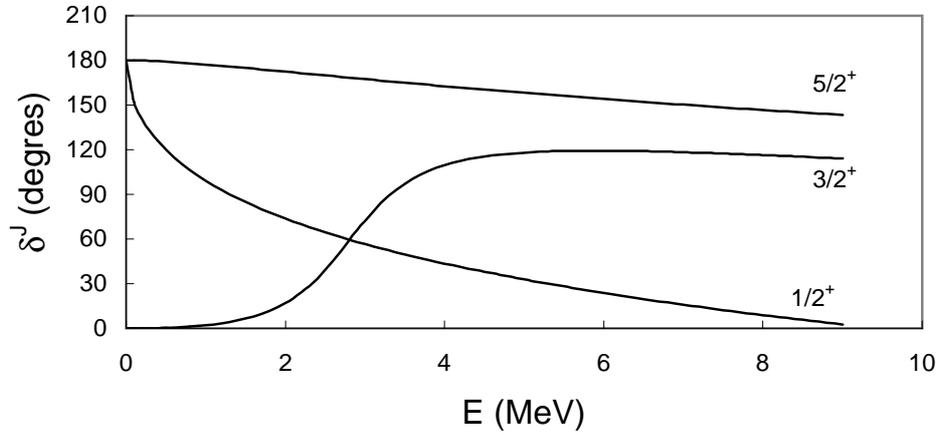


Fig. 3.1 – Déphasages du système $^{14}\text{C} + n$ obtenus avec le potentiel de Volkov (ondes partielles $1/2^+$, $3/2^+$ et $5/2^+$)

Nous remarquons sur la figure 3.1 que, conformément à l'expérience (voir Tableau 3.3), les ondes partielles $1/2^+$ et $5/2^+$ présentent un état lié. Nous avons en effet

$$\begin{aligned}\delta_{5/2^+}(0) - \delta_{5/2^+}(\infty) &= \pi \\ \delta_{3/2^+}(0) - \delta_{3/2^+}(\infty) &= \pi\end{aligned}$$

ce qui, par le théorème de Levinson, nous indique la présence d'un état lié par onde partielle. Par contre, nous ne retrouvons pas dans ces figures les résonances correspondant aux états de diffusion $1/2^-$, $5/2^-$ et $3/2^-$ repris dans le tableau 3.3. Ceci s'explique par le fait que les états de parités moins ne sont pas reproduits correctement par notre modèle. En effet, dans notre modèle, nous gardons le ^{14}C avec ses couches fermées et ajoutons le neutron

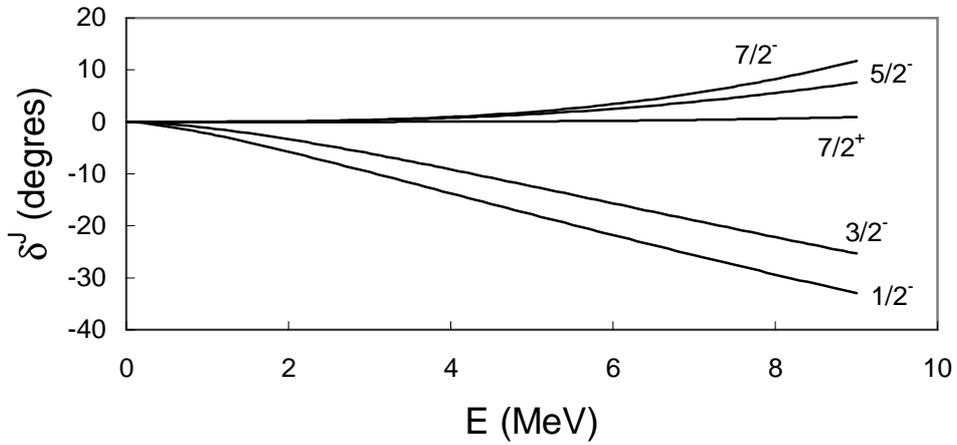


Fig. 3.2 – Déphasages du système $^{14}\text{C} + n$ obtenus avec le potentiel de Volkov (ondes partielles $1/2^-$, $3/2^-$, $5/2^-$, $7/2^+$ et $7/2^-$)

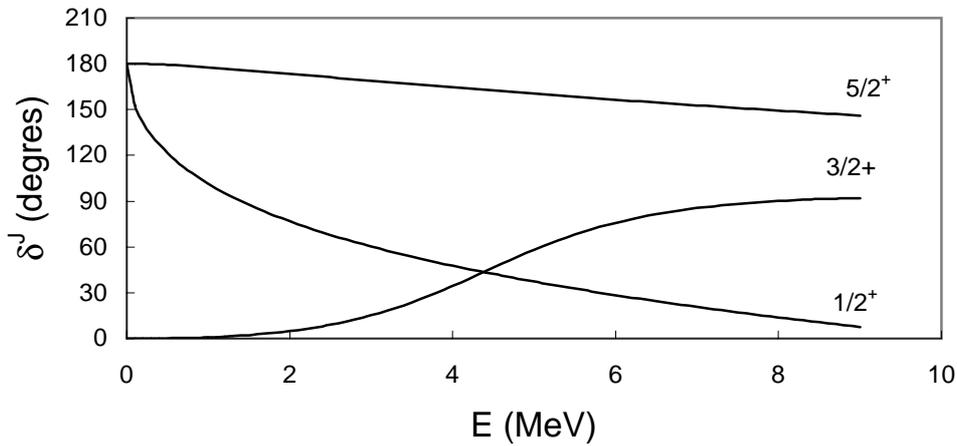


Fig. 3.3 – Déphasages du système $^{14}\text{C} + n$ obtenus avec le potentiel du Minnesota (ondes partielles $1/2^+$, $3/2^+$ et $5/2^+$)

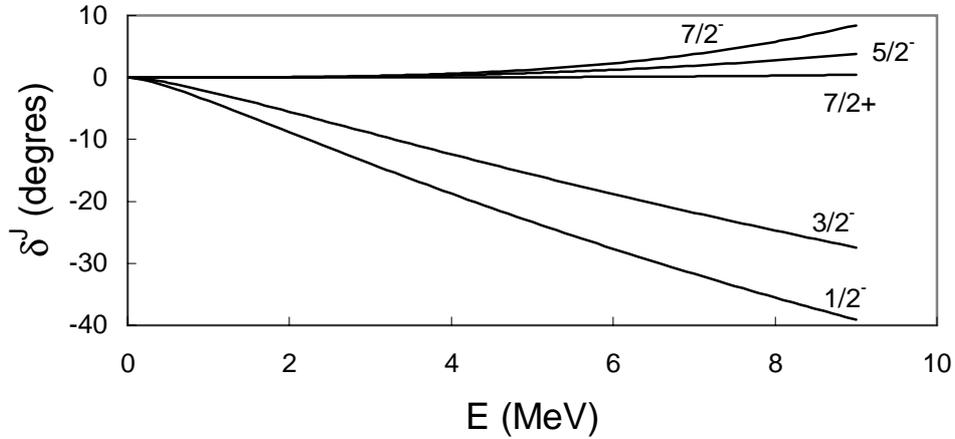


Fig. 3.4 – Déphasages du système $^{14}\text{C} + n$ obtenus avec le potentiel du Minnesota (ondes partielles $1/2^-$, $3/2^-$, $5/2^-$, $7/2^+$ et $7/2^-$)

incident sur une nouvelle couche. Or, pour les états de parités moins, il est plus avantageux d'exciter un neutron de la dernière sous-couche $p_{1/2}$ vers la sous-couche supérieure $d_{5/2}$ où se trouve le neutron incident. Cet arrangement des nucléons fait apparaître un trou dans une couche interne du ^{14}C , ce qui n'est pas décrit par notre modèle. Nous remarquons aussi la présence d'une résonance $3/2^+$. Néanmoins, elle n'apparaît pas à la même énergie et n'a pas même largeur pour les deux potentiels. Avec le potentiel de Volkov, le modèle prévoit une résonance $3/2^+$ dont l'énergie vaut 2.82 MeV et la largeur 1 MeV. Par contre, avec le potentiel du Minnesota, nous obtenons une résonance à 4.5 MeV et d'une largeur d'environ 2 MeV. Dans les deux cas cette résonance est large, ce qui peut expliquer son absence dans les résultats expérimentaux. En effet, la largeur d'une résonance est inversement proportionnelle aux temps de vie de l'état de diffusion correspondant. De plus, si cette résonance existe, elle se superpose aux résonances correspondant aux états de parité - du tableau 3.3, ce qui rend sa mesure expérimentale encore plus difficile.

3.4.2 Diffusion $^{14}\text{O} + \text{proton}$

Déphasages

Les résultats expérimentaux les plus récents sont repris dans le tableau 3.4. Les figures 3.5-8 représentent les déphasages des différentes ondes partielles pour la diffusion $^{14}\text{C} + \text{neutron}$, pour des énergies allant de 0 à 9 MeV.

Remarquons la présence de la même résonance $3/2^+$ que pour le système $^{14}\text{C} + \text{neutron}$. Elle ne se trouve de nouveau pas à la même énergie pour les deux

J^π	E (MeV)	Largeur (MeV)
$1/2^+$	$1.29^{+0.08}_{-0.06}$	~ 0.7
$5/2^+$	2.795 ± 0.045	0.325 ± 0.06

TAB. 3.4 – États de diffusion du système $^{14}\text{O} + p$ [10]

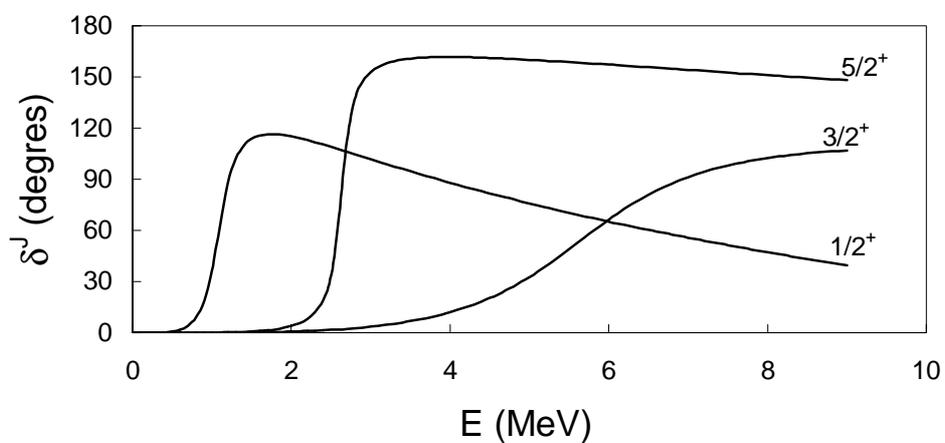


Fig. 3.5 – Déphasages du système $^{14}\text{O} + p$ obtenus avec le potentiel de Volkov (ondes partielles $1/2^+$, $3/2^+$ et $5/2^+$)

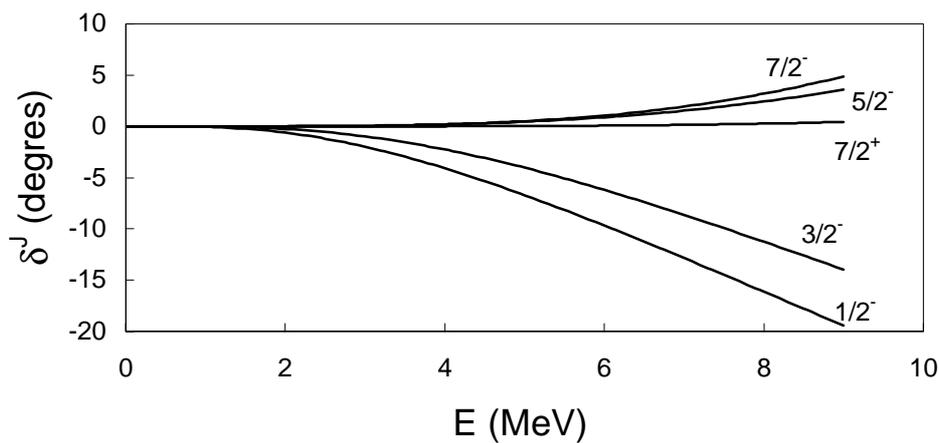


Fig. 3.6 – Déphasages du système $^{14}\text{O} + p$ obtenus avec le potentiel de Volkov (ondes partielles $1/2^-$, $3/2^-$, $5/2^-$, $7/2^+$ et $7/2^-$)

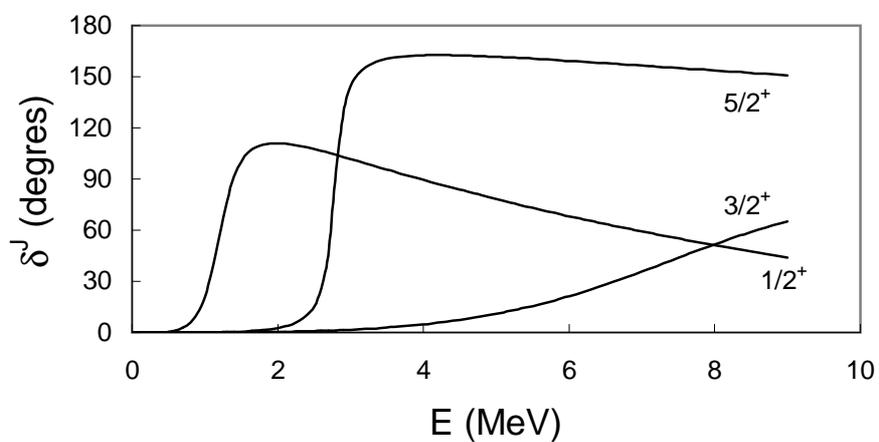


Fig. 3.7 – Déphasages du système $^{14}\text{O} + p$ obtenus avec le potentiel du Minnesota (ondes partielles $1/2^+$, $3/2^+$ et $5/2^+$)

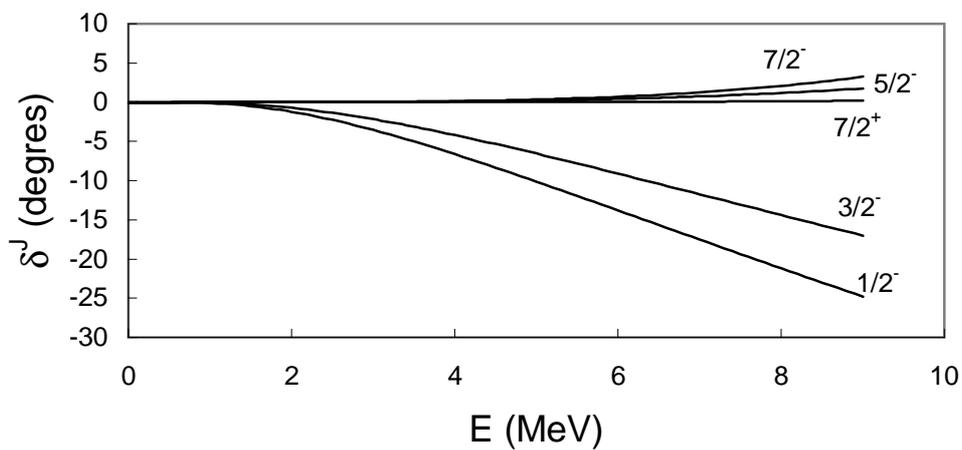


Fig. 3.8 – Déphasages du système $^{14}\text{O} + p$ obtenus avec le potentiel du Minnesota (ondes partielles $1/2^-$, $3/2^-$, $5/2^-$, $7/2^+$ et $7/2^-$)

potentiels, elle est située à une énergie beaucoup plus grande avec le potentiel du Minnesota. Nous retrouvons bien, avec les deux potentiels différents, les deux résonances $1/2^+$ et $5/2^+$ correspondant aux états de diffusions mesurés expérimentalement. Leurs caractéristiques sont reprises dans le tableau 3.5.

Potentiel	J^π	E (MeV)	Largeur (MeV)
Volkov	$1/2^+$	1.1 ± 0.1	0.3 ± 0.1
	$5/2^+$	2.65 ± 0.1	0.2 ± 0.1
Minnesota	$1/2^+$	1.2 ± 0.1	0.28 ± 0.1
	$5/2^+$	2.78 ± 0.1	0.21 ± 0.1

TAB. 3.5 – Énergies et largeurs des résonances $1/2^+$ et $5/2^+$

Les résonances sont relativement bien reproduites par notre modèle, la différence principale entre nos résultats et les mesures expérimentale de [10] réside dans la largeur des résonances. Nous ne connaissons néanmoins pas la définition de la largeur utilisée par les expérimentateurs et ne pouvons donc pas tirer de conclusion de la comparaison des tableaux 3.4 et 3.5. Dans [10], les résultats ont été reproduits avec un modèle potentiel (Woods-Saxon) et nous pouvons donc comparer les déphasages obtenus à l'aide de ce modèle et nos déphasages. La figure 3.9 reprend une comparaison des déphasages $1/2^+$. Nous remarquons que nos déphasages sont très proches des déphasages obtenus dans [10], surtout pour le cas du potentiel de Volkov. Ceci confirme la différence de définition utilisée pour le calcul de la largeur.

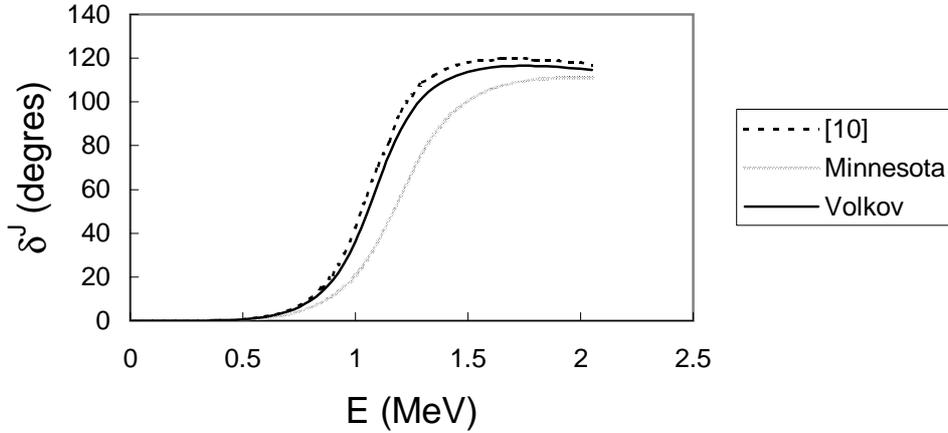


Fig. 3.9 – Comparaison des déphasages $1/2^+$ obtenus avec le potentiel de Volkov, le potentiel du Minnesota et dans le modèle potentiel

Fonctions d'excitations

Les figures 3.10-15 présentent les fonctions d'excitations expérimentales [10] comparées à celles obtenues dans notre modèle avec le potentiel de Volkov et du Minnesota. Les données expérimentales reprises sur les figures 3.11, 3.12, 3.14 et 3.15 sont un peu particulières. Les fonctions d'excitations n'ont en effet pas été mesurées pour un angle constant. L'angle θ dépend de l'énergie et les deux pics ont donc été mesurés pour des angles différents. Dans les figures 3.11 et 3.14, le premier pic a été mesuré avec $\theta = 136^\circ$ et le deuxième avec $\theta = 147^\circ$. Dans les figures 3.12 et 3.15, le premier pic a été mesuré avec $\theta = 106^\circ$ et le deuxième avec $\theta = 124^\circ$. Nous avons donc placé les fonctions d'excitation pour deux angles différents sur la même figure.

Les résultats sont en général assez bien reproduits par notre modèle. Nous constatons une très bonne reproduction des pics correspondant aux résonances $1/2^+$ et $5/2^+$ par le potentiel du Minnesota. Les pics trouvés avec le potentiel de Volkov sont légèrement décalés sur la gauche, tendance que nous avons déjà observée en examinant les déphasages. La zone d'énergie se trouvant entre les deux pics est difficile à analyser pour les figures reprenant les fonctions d'excitations mesurées à deux angles différents. Nous ne savons pas en effet à quels angles correspondent exactement les points mesurés. Par contre, pour un angle de 180° , nous constatons une déviation de la courbe théorique par rapport aux mesures expérimentales dans cette zone. La section efficace différentielle a aussi été mesurée pour un angle de 180° dans [11]. Nous nous rendons compte du fait que les résultats diffèrent de façon non négligeable d'une expérience à une autre. La figure 3.16 reprend la fonction

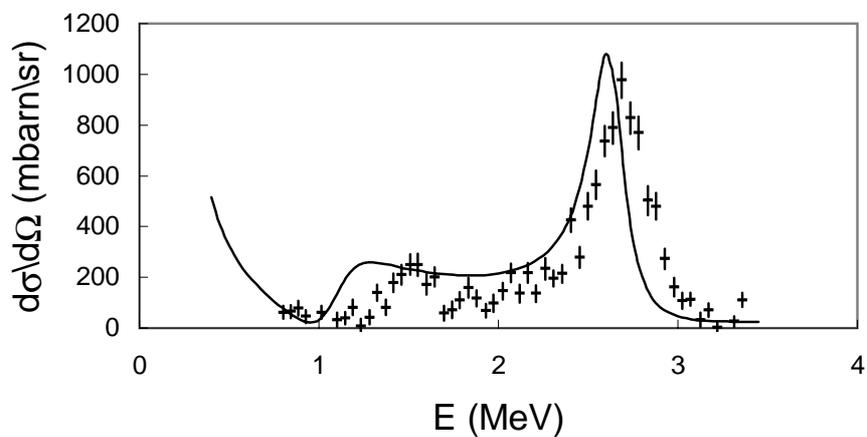


Fig. 3.10 – Fonction d'excitation obtenue avec le potentiel de Volkov pour un angle de 180° comparée à l'expérience [10]

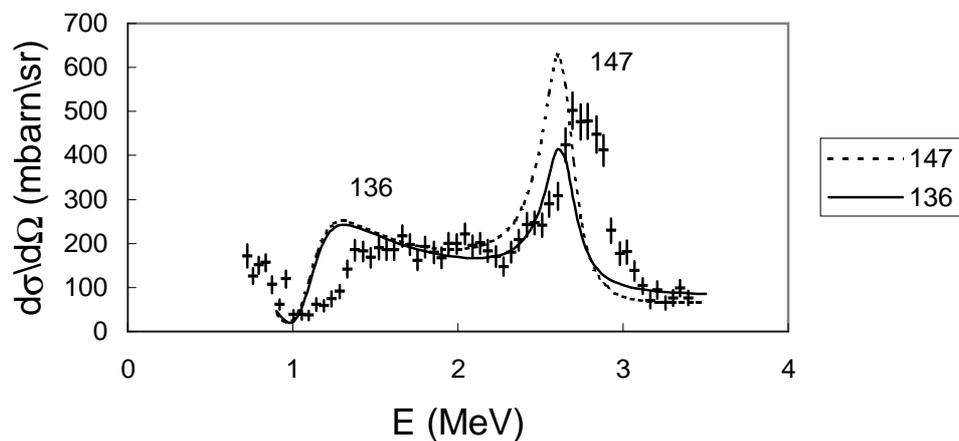


Fig. 3.11 – Fonctions d'excitation obtenues avec le potentiel de Volkov pour des angles de 136° et 147° comparées à l'expérience [10]

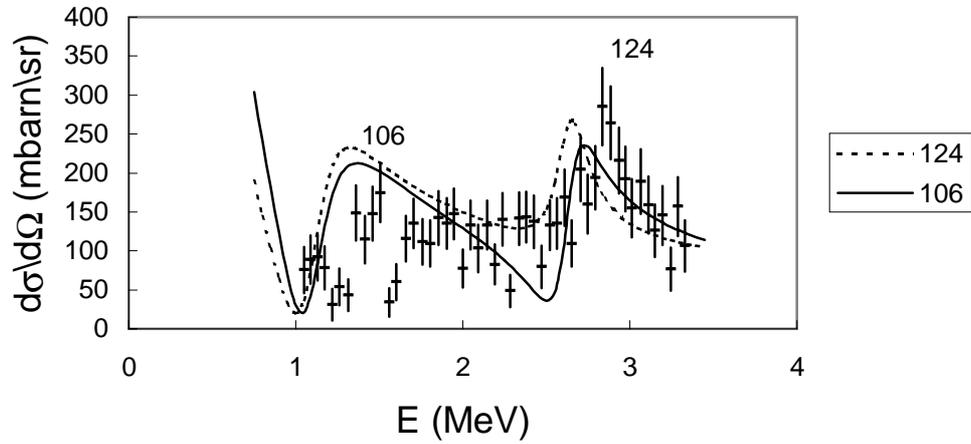


Fig. 3.12 – Fonctions d'excitation obtenues avec le potentiel de Volkov pour des angles de 106° et 124° comparées à l'expérience [10]

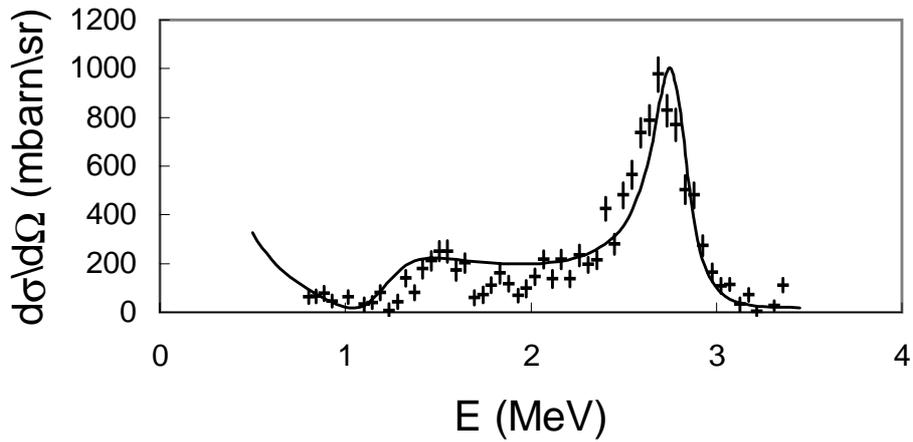


Fig. 3.13 – Fonction d'excitation obtenue avec le potentiel de Minnesota pour un angle de 180° comparée à l'expérience [10]

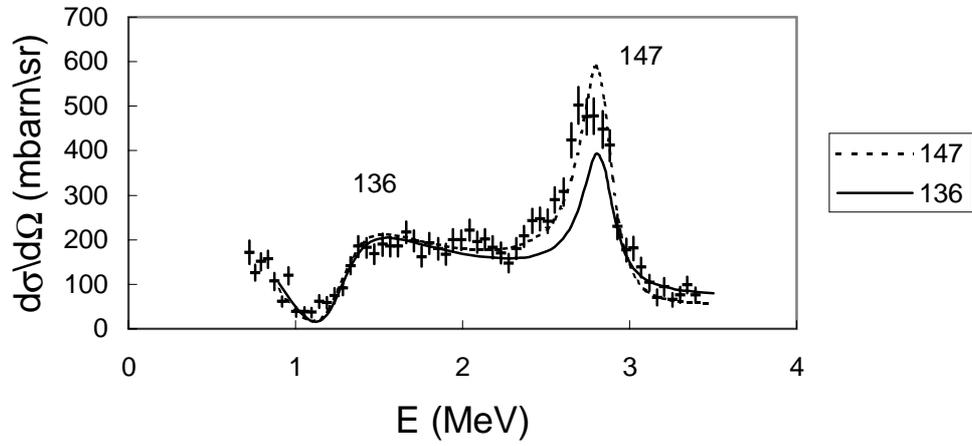


Fig. 3.14 – Fonctions d'excitation obtenues avec le potentiel de Minnesota pour des angles de 136° et 147° comparées à l'expérience [10]

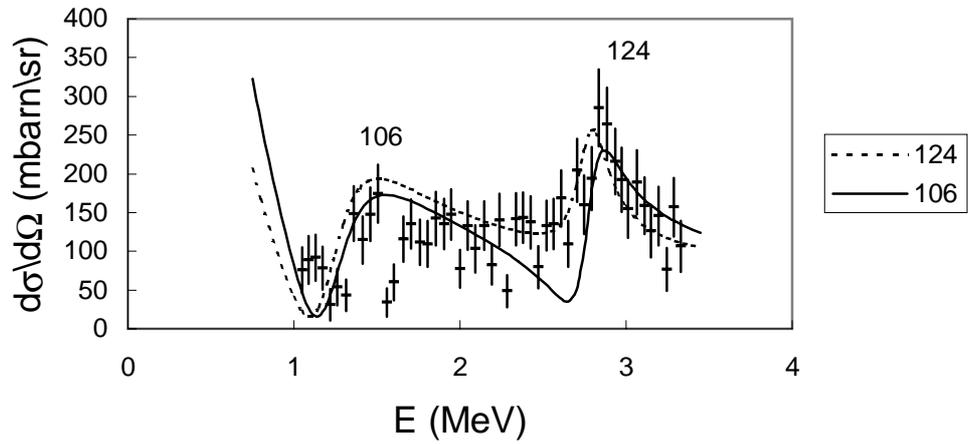


Fig. 3.15 – Fonctions d'excitation obtenues avec le potentiel de Minnesota pour des angles de 106° et 124° comparées à l'expérience [10]

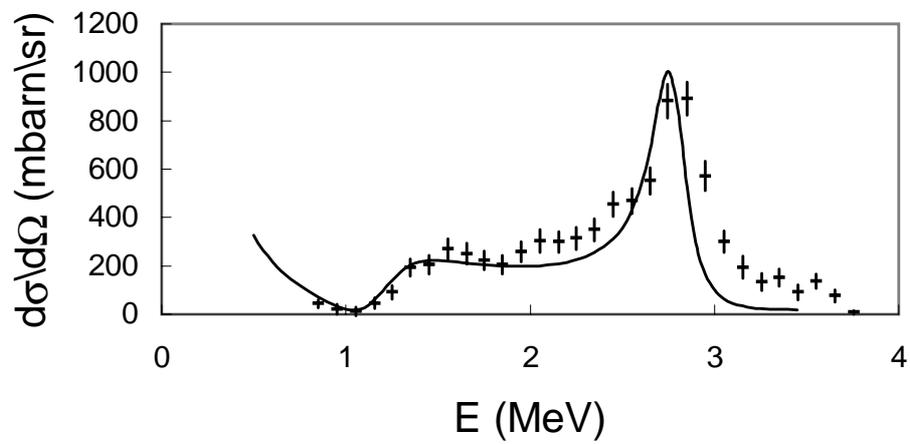


Fig. 3.16 – *Fonction d'excitation obtenue avec le potentiel de Minnesota pour un angle de 180° comparée à l'expérience [11]*

d'excitation trouvée avec le potentiel de Minnesota comparée aux résultats obtenus dans [11]. Nous remarquons que les mesures suivent mieux la courbe théorique entre les deux pics. Par contre, nous observons une moins bonne reproduction de l'expérience aux grandes énergies.

Chapitre 4

Déphasages et sections efficaces du système $^{15}\text{O} + \text{proton}$

La théorie concernant ce système n'ayant pas été explicitée dans ce travail, nous commencerons par donner une brève introduction théorique.

4.1 Le système $^{15}\text{O} + \text{proton}$

Les éléments de l'ensemble 1.1 valent pour ce système

$$A_1 = 15 \quad (4.1)$$

$$A_2 = 1 \quad (4.2)$$

$$I_1 = \frac{1}{2} \quad (4.3)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \quad (4.4)$$

$$\pi_1 = - \quad (4.5)$$

$$\pi_2 = + \quad (4.6)$$

où les nombres quantiques de ^{15}O sont ceux de son état fondamental. Le spin de voie I peut donc prendre les valeurs $I = 0,1$. Nous avons donc deux couples (II) possibles pour des valeurs de J et π données, sauf pour les ondes partielles 0^+ et 0^- . Des exemples sont repris dans le tableau 4.1. Il en découle que la matrice de collision est dans ce cas-ci une matrice 2×2 . Une généralisation aux cas à plusieurs voies de la méthode MRM se trouve dans l'annexe A.

J^π	(lI)
0^+	(11)
0^-	(00)
1^+	$(10), (11)$
1^-	$(01), (21)$
2^+	$(11), (31)$
2^-	$(20), (21)$

TAB. 4.1 – Voies possibles pour J et π donnés

4.2 États liés

4.2.1 Principe de calcul

Pour le cas à plusieurs voies, définissons la fonction d'essai

$$\Psi^{J\pi} = \sum_{II} \Psi_{II}^{J\pi} \quad (4.7)$$

où $\Psi_{II}^{J\pi}$ est définie par 1.58. En injectant 4.7 dans l'équation de Schrödinger et en projetant sur $\phi_{II}^{JM\pi}(R^n)$, nous trouvons les équations

$$\sum_{II_n} \left(H_{II',II}^{J\pi}(R^n', R^n) - EN_{II',II}^{J\pi}(R^n', R^n) \right) f_{II}^{J\pi} = 0 \quad (4.8)$$

avec

$$H_{II',II}^{J\pi}(R^n', R^n) = \langle \phi_{II'}^{JM\pi}(R^n') | H | \phi_{II}^{JM\pi}(R^n) \rangle \quad (4.9)$$

$$N_{II',II}^{J\pi}(R^n', R^n) = \langle \phi_{II'}^{JM\pi}(R^n') | \phi_{II}^{JM\pi}(R^n) \rangle \quad (4.10)$$

Les valeurs propres du système 4.8 sont des bornes supérieures des énergies des états liés du système.

4.2.2 Les états liés du ^{16}N

Le ^{16}F ne possédant pas non plus d'état lié, nous ajustons les paramètres par rapport aux états liés du ^{16}N . Les énergies et nombres quantiques de ces états sont repris dans le tableau 4.2. Nous utiliserons seulement le potentiel du Minnesota pour ce système et le paramètre de l'oscillateur vaut 1.60 fm. Nous nous rendons vite compte que nous n'obtiendrons jamais les quatre états liés dans le bon ordre et aux bonnes énergies. Ceci est dû au fait que nous avons négligé l'interaction tensorielle dans le potentiel nucléon-nucléon.

$J\pi$	E (MeV)
$^{15}\text{N} + \text{n}$	0
1^-	-2.094
3^-	-2.193
0^-	-2.371
2^-	-2.491

TAB. 4.2 – Niveaux du ^{16}N [9]

Nous décidons donc de nous concentrer sur les deux états les plus liés. Nous trouvons

$$\begin{aligned}
 E_{0^-} &= -2.370 \\
 E_{1^-} &= -2.474 \\
 E_{2^-} &= -2.491 \\
 E_{3^-} &= -2.971
 \end{aligned}$$

avec les paramètres

$$\begin{aligned}
 u &= 0.9405 \\
 S_0 &= 31.50
 \end{aligned}$$

Remarquons que nous obtenons un état fondamental différent de celui mesuré.

4.3 Diffusion $^{15}\text{O} + \text{proton}$

4.3.1 Déphasages

La matrice $U^{J\pi}$ (voir Annexe A) est symétrique et unitaire. Dans le cas où elle est de dimension 2×2 , elle est donc entièrement définie par trois nombres réels. Nous choisissons ici les paramètres utilisés dans [16], c'est-à-dire τ^J , δ_1^J et δ_2^J , définis comme suit

$$U_{11}^{J\pi} = \tau^J e^{2i\delta_1^J} \quad (4.11)$$

$$U_{22}^{J\pi} = \tau^J e^{2i\delta_2^J} \quad (4.12)$$

Les résultats expérimentaux dont nous disposons sont l'énergie et la largeur (Γ) des états de diffusion, mesurées à partir de réactions indirectes [9]. Ces résultats sont repris dans le tableau 4.3.

J^π	E (MeV)	Γ (keV)	γ^2 (keV)
3^-	1.263	< 15	< 4.4
2^-	0.959	40 ± 30	20 ± 15
1^-	0.728	< 40	< 16
0^-	0.535	40 ± 20	30 ± 15

TAB. 4.3 – Niveaux du ^{16}F [9]

Ces deux valeurs peuvent être obtenues directement à partir d'un des déphasages diagonaux. Prenons par exemple le cas de l'onde partielle 2^- , les deux couples (II) possibles sont (20) et (21). Les déphasages $\delta_1^{2^-}$ et $\delta_2^{2^-}$ correspondants sont représentés sur la figure 4.1. Remarquons que les deux

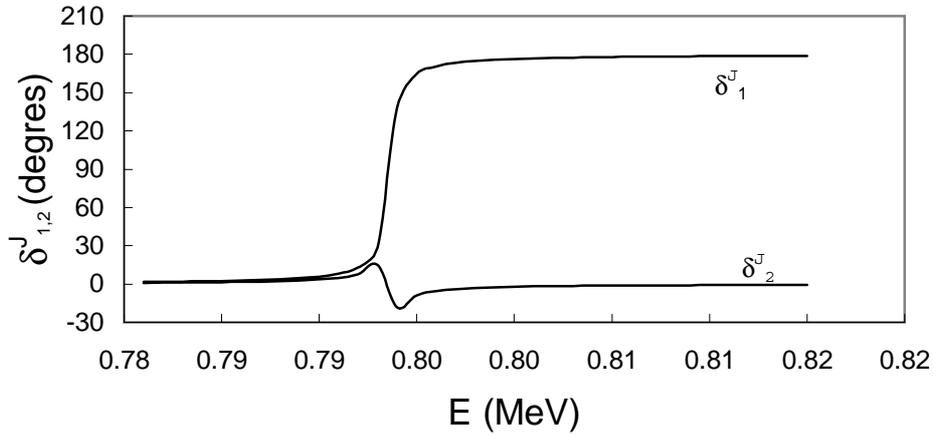


Fig. 4.1 – Déphasages diagonaux de l'onde partielle 2^-

déphasages se comportent différemment aux alentours de la résonance. Ces deux comportements se trouvent à la même énergie et ont la même largeur, ils nous fournissent tous deux les valeurs recherchées. Nous nous contenterons donc de représenter un déphasage par onde partielle en ne perdant pas de vue le fait que tous les déphasages sont pris en compte pour le calcul des sections efficaces différentielles. Les déphasages du système sont repris sur les figures 4.2 et 4.3. Remarquons que l'état 3^- se présente sous forme d'un état lié. Nous pouvons nous y attendre, étant donné l'énergie de liaison beaucoup trop élevée que nous avons trouvée pour le noyau miroir au point 4.2. Les trois autres états de diffusion du tableau 4.2 se retrouvent par contre bien sous forme de résonances. Leurs caractéristiques sont reprises dans le tableau 4.3. Dans les tableaux 4.3 et 4.4 se trouvent les largeurs réduites (γ^2) des états de diffusion. Ces dernières sont très intéressantes car elles ne

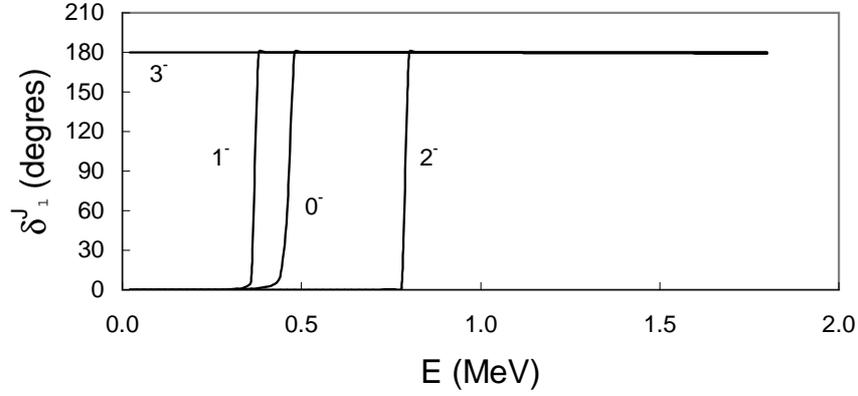


Fig. 4.2 – Déphasages du système $^{15}\text{O} + p$ obtenus avec le potentiel du Minnesota (ondes partielles 0^- , 1^- , 2^- et 3^-)

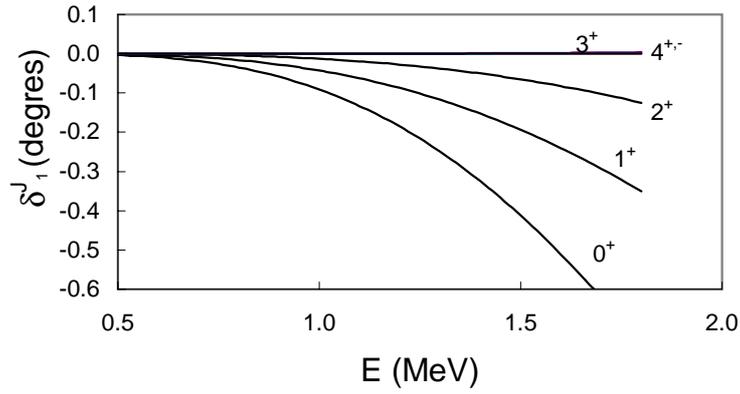


Fig. 4.3 – Déphasages du système $^{15}\text{O} + p$ obtenus avec le potentiel du Minnesota (ondes partielles 0^+ , 1^+ , 2^+ , 3^- , 4^+ et 4^-)

J^π	E (MeV)	Γ (keV)	γ^2 (keV)
2^-	0.793 ± 0.001	1 ± 0.5	0.8 ± 0.4
1^-	0.371 ± 0.001	2 ± 1	5.4 ± 2.8
0^-	0.463 ± 0.001	10 ± 1	11 ± 1

TAB. 4.4 – Caractéristiques des résonances du système $^{15}\text{O} + \text{proton}$

dépendent pas de l'énergie de la résonance. Nous pouvons donc comparer les largeurs expérimentales et théoriques même lorsque leurs énergies respectives sont fort différentes. La largeur réduite est définie comme suit

$$\gamma^2 = \frac{\Gamma}{2P_l(\eta,ka)} \quad (4.13)$$

où P_l est le facteur de pénétration et s'écrit

$$P_l(\eta,ka) = \frac{ka}{F_l^2(\eta,ka) + G_l^2(\eta,ka)} \quad (4.14)$$

où a est un paramètre que nous prenons égal à 5 fm. Remarquons que le facteur de pénétration dépend de l et non de J . Deux déphasages diagonaux ne correspondant pas au même moment cinétique orbital pourraient ne pas avoir la même largeur réduite. Prenons par exemple le cas de l'onde partielle 1^- , les deux couples (lI) possibles sont (01) et (21). Les déphasages $\delta_1^{1^-}$ et $\delta_2^{1^-}$ correspondants sont représentés sur la figure 3.4. La résonance n'est pas

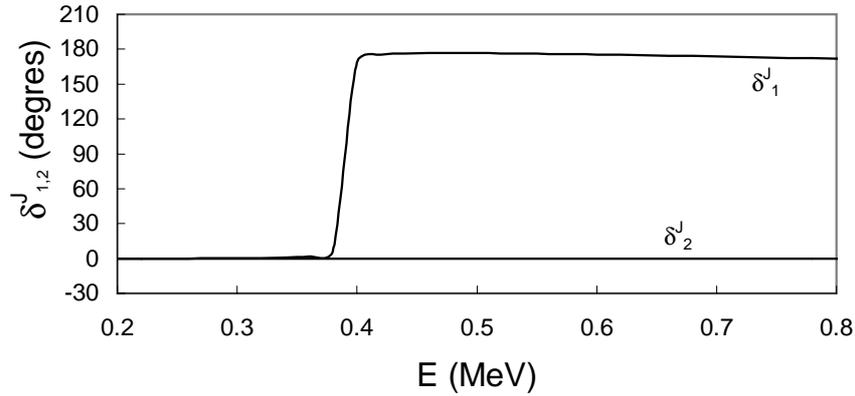


Fig. 4.4 – Déphasages diagonaux de l'onde partielles 1^-

visible dans le déphasage $\delta_2^{1^-}$. Ceci s'explique par le fait que, pour la deuxième voie, la barrière de Coulomb est sensiblement plus grande. La première voie est donc fortement favorisée et nous pouvons traiter cette résonance comme pour une collision à une voie. Précisons que l'onde partielle 0^- est aussi traitée de cette manière, celle-ci ne possédant qu'un couple (lI) satisfaisant les équations 1.2-4. Comparons maintenant les tableaux 4.3 et 4.4. Nous observons une assez bonne correspondance entre la théorie et l'expérience pour les énergies des niveaux 0^- et 2^- . Nous retrouvons l'inversion de ces états par rapport aux états liés 2^- et 0^- du ^{16}N . Les largeurs de ces deux états

sont par contre trop étroites. L'énergie de la résonance 1^- est fort éloignée de l'état de diffusion mesuré. Ceci est dû à la mauvaise reproduction de l'état lié 1^- du ^{16}N au point 4.2.2. Nous remarquons que, malgré cette différence d'énergie, nous obtenons une largeur réduite compatible avec celle mesurée.

4.3.2 Fonctions d'excitation

L'expression de la section efficace différentielle pour le système $^{15}\text{O} + \text{proton}$ s'écrit [6]

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sum_{I_\omega=0}^1 \sum_{K_\omega=-I_\omega}^{I_\omega} \sum_{I_c=0}^1 \sum_{K_c=-I_c}^{I_c} |q_{I_c K_c, I_\omega K_\omega}|^2 \quad (4.15)$$

avec

$$\begin{aligned} q_{I_c K_c, I_\omega K_\omega} &= i\pi^{\frac{1}{2}} k^{-1} \sum_{J=0}^{\infty} \sum_{\pi} \sum_{l_c=|J-I_c|}^{J+I_c} \sum_{l_\omega=|J-I_\omega|}^{J+I_\omega} i^{l_\omega-l_c} (2l_\omega + 1) e^{\sigma_0} \\ &\quad \times (l_\omega I_\omega 0 K_\omega | J K_\omega) (l_c I_c K_\omega - K_c K_c | J K_\omega) \\ &\quad \times (\delta_{l_\omega l_c} \delta_{I_\omega I_c} - U_{l_c I_c, l_\omega I_\omega}^{J\pi}) Y_l^{K_\omega - K_c}(\Omega_\rho) \end{aligned} \quad (4.16)$$

Les fonctions d'excitation pour trois angles différents sont représentées à la figure 4.5. Nous retrouvons les trois pics correspondant aux résonances 1^- , 0^- et 2^- . Remarquons qu'ils deviennent moins visibles pour des angles plus petits. Nous pouvons écrire la section efficace différentielle 4.15 sous la forme

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto |f(\theta)|^2 = |f_c(\theta) + f_n(\theta)|^2 \quad (4.17)$$

où $f(\theta)$ est appelée amplitude de diffusion, $f_c(\theta)$ et $f_n(\theta)$ étant associées respectivement aux parties coulombienne et quasi nucléaire. La fonction coulombienne s'écrit

$$f_c(\theta) \propto \frac{1}{\sin^2(\theta/2)} \quad (4.18)$$

Ce terme augmente fortement lorsque θ diminue et la partie nucléaire devient assez vite négligeable, ce qui explique la disparition des pics aux petits angles.

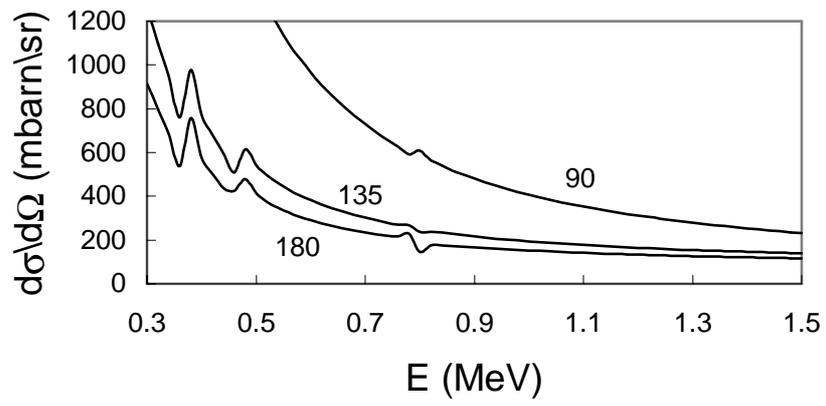


Fig. 4.5 – Fonctions d'excitation du système pour des angles de 180° , 135° et 90°

Conclusion

Pour le système $^{14}\text{O} + \text{proton}$, les deux états liés du noyau miroir sont bien reproduits par notre modèle, et ce avec le potentiel de Volkov et le potentiel du Minnesota. Nous ne retrouvons cependant pas les états de diffusion du ^{15}C mesurés dans [8], la configuration des états de parité moins n'étant pas correctement décrite par notre modèle. Ces états ont en effet une énergie minimale lorsque le ^{14}O se trouve dans un état excité. Pour le ^{15}F par contre nous trouvons bien les deux états de diffusion mesurés à l'aide de la réaction directe [10]. Nous observons cependant un désaccord au niveau des largeurs de ces états. Pourtant, lorsque nous comparons nos déphasages et ceux obtenus par [10] en ajustant les paramètres d'un potentiel de Woods-Saxon, nous observons une très bonne concordance. Les largeurs données dans [10] sont donc difficiles à comprendre, au vu des déphasages obtenus avec leurs paramètres dans un modèle potentiel. La réaction directe a permis la mesure de sections efficaces différentielles pour plusieurs angles [10,11]. Nous remarquons une très bonne reproduction de ces résultats par notre modèle qui, rappelons le, ne possède que deux paramètres qui ont été ajustés sur le noyau miroir.

La collision $^{15}\text{O} + \text{proton}$ n'a pas encore été mesurée à ce jour. Nous possédons néanmoins des informations sur les états de diffusion du ^{16}F , obtenues à partir de réactions indirectes [9]. Il n'a pas été possible, pour ce système, de reproduire les états liés du noyau miroir [9]. Ce système nous montre en quelque sorte les limites de notre modèle. Nous devrions ajouter l'interaction tensorielle pour pouvoir trouver les états du ^{16}N dans le bon ordre et aux bonnes énergies. Nous avons néanmoins pu reproduire correctement les états les plus liés 0^- et 2^- . Les états de diffusion du ^{16}F correspondant à ces états sont assez bien reproduits. Nous retrouvons en effet l'inversion des états de diffusion 0^- et 2^- , par rapport aux états liés 0^- et 2^- du ^{16}N .

Annexe A

Généralisation de la méthode de la Matrice R Microscopique

Dans le cas où, pour J et π donnés, plusieurs combinaisons (II) satisfont les équations 1.2-4, nous devons généraliser les expressions des ondes partielles 1.34, 1.43 et 1.48. En effet, la voie de sortie ne correspond plus obligatoirement à la voie d'entrée. Les nombres quantiques porteront donc dorénavant un indice c se référant aux n_c voies différentes. Nous utiliserons dans la suite l'indice ω pour la voie d'entrée. L'expression 1.33 de la fonction de voie s'écrit donc

$$\varphi_c^{JM\pi}(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \Omega_\rho) = \sum_{m\nu} (l_c I_c m \nu | JM) Y_{l_c}^m(\Omega_\rho) \phi_{I_c \nu}^{\pi_1 \pi_2}(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2). \quad (\text{A.1})$$

où nous avons remplacé les indices ($l_c I_c$) des fonctions d'onde par l'indice c afin d'alléger l'écriture. Ces fonctions de voie sont orthonormées, ainsi

$$\langle \varphi_c^{JM\pi} | \varphi_{c'}^{J'M'\pi'} \rangle = \delta_{cc'} \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \delta_{\pi\pi'} \quad (\text{A.2})$$

L'onde partielle en région asymptotique prend maintenant la forme

$$\Psi_\omega^{JM\pi, as} = \sum_c g_{\omega, c}^{J\pi, as}(\rho) \varphi_c^{JM\pi}(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \Omega_\rho) \quad (\text{A.3})$$

où $g_{\omega, c}^{J\pi, as}$ est solution de

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu m} \left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \frac{l_c(l_c + 1)}{\rho^2} \right) + Z_1 Z_2 \frac{e^2}{\rho} - E \right] g_{\omega, c}^{J\pi, as}(\rho) = 0 \quad (\text{A.4})$$

et s'écrit

$$g_{\omega, c}^{J\pi, as}(\rho) = n_{l_\omega} \frac{I_{l_c}(k\rho) \delta_{\omega, c} - U_{c, \omega}^{J\pi}(E) O_{l_c}(k\rho)}{k\rho} \quad (\text{A.5})$$

avec

$$n_{l_\omega} = i^{l_\omega+1} \left[-\frac{\pi(2l_\omega + 1)}{v} \right]^{1/2} \quad (\text{A.6})$$

Le terme $U_{c,\omega}^{J\pi}(E)$ désigne l'élément (ω,c) de la matrice de collision $U^{J\pi}(E)$. De même, 1.43 et 1.48 deviennent

$$\Psi_\omega^{JM\pi} = \sum_c g_{\omega,c}^{J\pi}(\rho) \varphi_c^{JM\pi}(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \Omega_\rho) \quad (\text{A.7})$$

$$\Psi_\omega^{JM\pi} = \sum_c \int f_{\omega,c}^{J\pi}(R) \phi_c^{JM\pi}(R) dR \quad (\text{A.8})$$

avec

$$\phi_c^{JM\pi}(R) = C\mathcal{A} \varphi_c^{JM\pi}(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \Omega_\rho) \Gamma_{l_c}(\rho, R) \quad (\text{A.9})$$

Les fonctions relatives $g_{\omega,c}^{J\pi}(\rho)$ et les fonctions génératrices $f_{\omega,c}^{J\pi}(R)$ sont liées par la relation

$$g_{\omega,c}^{J\pi}(\rho) = \int \Gamma_{l_c}(\rho, R) f_{\omega,c}^{J\pi}(R) dR \quad (\text{A.10})$$

En pratique, l'intégrale dans A.8, est remplacée par une somme finie sur le nombre de coordonnées n_g utilisées. L'équation de Bloch-Schrödinger prend la forme

$$(H + \mathcal{L} - E) \Psi_\omega^{JM\pi} = \mathcal{L} \Psi_\omega^{JM\pi, as} \quad (\text{A.11})$$

avec

$$\mathcal{L} = \sum_c \frac{\hbar^2}{2\mu m a} \delta(\rho - a) |\varphi_c^{JM\pi}\rangle \left(\frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{L_c}{\rho} \right) \rho \langle \varphi_c^{JM\pi}| \quad (\text{A.12})$$

où les L_c sont les constantes de Bloch qui peuvent être choisies librement. Elles sont introduites afin de permettre, par un choix judicieux de leur valeur, d'annuler les éléments de matrices associés aux voies fermées. Notre système ne possédant que des voies ouvertes, nous les choisirons nulles. En projetant l'équation A.11 sur les fonctions d'onde A.9, nous obtenons le système suivant

$$\sum_{c=1}^{n_c} \sum_{n=1}^{n_g} C_{c'n',cn}^{J\pi}(E) f_{\omega,c}^{J\pi}(R^n) = \langle \phi_{c'}^{JM\pi}(R^{n'}) | \mathcal{L} | \Psi_\omega^{JM\pi, as} \rangle \quad (\text{A.13})$$

avec

$$C_{c'n',cn}^{J\pi}(E) = \langle \phi_{c'}^{JM\pi}(R^{n'}) | H + \mathcal{L} - E^{J\pi} | \phi_c^{JM\pi}(R^n) \rangle_I \quad (\text{A.14})$$

L'indice I signifie que l'intégrale se limite à la région intérieure. L'équation de continuité s'écrit

$$g_{\omega,c}^{J\pi}(a) = g_{\omega,c}^{J\pi, as}(a) \quad (\text{A.15})$$

ou encore

$$\sum_n \Gamma_{l_c}(a, R^n) f_{\omega, c}^{J\pi}(R^n) = n_{l_\omega} \frac{I_{l_c}(ka) \delta_{\omega, c} - U_{c, \omega}^{J\pi}(E) O_{l_c}(ka)}{ka} \quad (\text{A.16})$$

L'élément de gauche de l'équation A.13 peut s'interpréter comme le produit de la matrice $C^{J\pi}(E)$ dont les éléments sont les $C_{c'n', cn}^{J\pi}(E)$ avec le vecteur $f^{J\pi}(R^n)$ dont les éléments sont les $f_{\omega, c}^{J\pi}(R^n)$. Si la matrice n'est pas singulière, nous pouvons inverser l'équation A.13. En désignant par $(C^{J\pi})^{-1}(E)$ la matrice inverse, nous obtenons le système suivant

$$f_{\omega, c}^{J\pi}(R^n) = \sum_{c'=1}^{n_c} \sum_{n'=1}^{n_g} (C^{J\pi})_{cn, c'n'}^{-1}(E) \langle \phi_{c'}^{JM\pi}(R^{n'}) | \mathcal{L} | \Psi_\omega^{JM\pi, as} \rangle \quad (\text{A.17})$$

Les propriétés d'orthonormalité A.2 des fonctions de voies impliquent

$$\begin{aligned} & \langle \phi_{c'}^{JM\pi}(R^{n'}) | \mathcal{L} | \Psi_\omega^{JM\pi, as} \rangle = \\ & \frac{\hbar^2}{2\mu m a} \int_0^\infty \delta(\rho - a) \Gamma_{l_{c'}}(\rho, R^{n'}) \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho g_{\omega, c'}^{J\pi}(\rho)) \rho^2 d\rho \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

ou encore, avec A.5

$$\begin{aligned} & \langle \phi_{c'}^{JM\pi}(R^{n'}) | \mathcal{L} | \Psi_\omega^{JM\pi, as} \rangle = \\ & \frac{\hbar^2 a}{2\mu m} \Gamma_{l_{c'}}(a, R^{n'}) n_{l_\omega} \left[I'_{l_{c'}}(ka) \delta_{\omega, c'} - U_{c', \omega}^{J\pi}(E) O'_{l_{c'}}(ka) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

En injectant A.19 dans A.17, nous obtenons

$$\begin{aligned} f_{\omega, c}^{J\pi}(R^n) &= \sum_{c'=1}^{n_c} \sum_{n'=1}^{n_g} \frac{\hbar^2 a}{2\mu m} n_{l_\omega} \Gamma_{l_{c'}}(a, R^{n'}) (C^{J\pi})_{cn, c'n'}^{-1}(E) \\ & \times \left[I'_{l_{c'}}(ka) \delta_{\omega, c'} - U_{c', \omega}^{J\pi}(E) O'_{l_{c'}}(ka) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Injectons maintenant l'expression A.20 de $f^{J\pi}(R^n)$ dans l'équation de continuité A.16, nous trouvons

$$\begin{aligned} \sum_{c=1}^{n_c} R_{c, c'}^{J\pi}(E) \left[I'_{l_{c'}}(ka) \delta_{\omega, c'} - U_{c', \omega}^{J\pi}(E) O'_{l_{c'}}(ka) \right] &= \\ \frac{I_{l_c}(ka) \delta_{\omega, c} - U_{c, \omega}^{J\pi}(E) O_{l_c}(ka)}{ka} \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

avec

$$R_{c, c'}^{J\pi}(E) = \frac{\hbar^2 a}{2\mu m} \sum_{nn'} (C^{J\pi})_{cn, c'n'}^{-1}(E) \Gamma_{l_c}(a, R^n) \Gamma_{l_{c'}}(a, R^{n'}) \quad (\text{A.22})$$

Posons

$$Z_{c,c'}^{J\pi}(E) = I'_{l_{c'}}(ka) \delta_{c,c'} - ka R_{c,c'}^{J\pi}(E) I'_{l_{c'}}(ka) \quad (\text{A.23})$$

dont le conjugué complexe s'écrit

$$Z_{c,c'}^{J\pi,*}(E) = O'_{l_{c'}}(ka) \delta_{c,c'} - ka R_{c,c'}^{J\pi}(E) O'_{l_{c'}}(ka). \quad (\text{A.24})$$

Nous pouvons écrire

$$Z_{c,\omega}^{J\pi}(E) = \sum_{c'=1}^{n_c} Z_{c,c'}^{J\pi,*}(E) U_{c,\omega}^{J\pi}(E). \quad (\text{A.25})$$

En supposant la matrice $Z^{J\pi,*}(E)$ non singulière et en notant $(Z^{J\pi,*})^{-1}(E)$ son inverse, nous obtenons

$$U_{c,\omega}^{J\pi}(E) = \sum_{c'=1}^{n_c} (Z^{J\pi,*})_{c,c'}^{-1}(E) Z_{c',\omega}^{J\pi}(E). \quad (\text{A.26})$$

La matrice de collision est donc égale au produit matriciel suivant

$$U^{J\pi}(E) = (Z^{J\pi,*})^{-1}(E) Z^{J\pi}(E) \quad (\text{A.27})$$

Bibliographie

- [1] D. Baye: *Mécanique quantique. Première partie : notions de base*, Cours dispensé en 4^{ème} année du grade d'ingénieur civil physicien, Faculté des sciences appliquées, Université Libre de Bruxelles (2002-3)
- [2] D. Baye: *Eléments de physique nucléaire*, Cours dispensé en 4^{ème} année du grade d'ingénieur civil physicien, Faculté des sciences appliquées, Université Libre de Bruxelles (2002-3)
- [3] D. Baye: *Compléments de physique nucléaire*, Cours dispensé en 5^{ème} année du grade d'ingénieur civil physicien, Faculté des sciences appliquées, Université Libre de Bruxelles (2003-4)
- [4] M. Abramovitz and I.A. Stegun: *Handbook of mathematical functions*, Dover Publications, inc., New-York (1970)
- [5] D. Baye and N. Pecher: *Generator-coordinate description of heavy-ion collisions with a spin-orbite force*, Bulletin de la classe des sciences, 5^e série - Tome LXVII,(1981)
- [6] D. Baye, P.-H. Heenen and M. Libert-Heinemann: *Microscopic R-Matrix theory in a generator coordinate basis*, Nucl. Phys. A291, 230 (1977)
- [7] R.D. Lawson: *Theory of the nuclear shell model*, Clarendon Press, Oxford (1980)
- [8] F. Ajzenberg-Selove: *Energy levels of light nuclei A=13-15*, Nucl. Phys. A449 (1986)

- [9] F. Ajzenberg-Selove: *Energy levels of light nuclei A=16-17*, Nucl. Phys. A460 (1986)
- [10] V.Z. Goldberg, G.G. Chubarian, G. Tabacaru, L. Trache, R.E. Tribble, A. Arahamian, G.V. Rogachev, B.B. Skorodumov and X.D. Tang: *Low-lying levels in ^{15}F and the shell model potential for drip-line nuclei*, Phys. Rev. C 69, 031302 (2004)
- [11] W.A. Peters, T. Baumann, D. Bazin, B.A. Brown, R.R.C. Clement, N. Frank, P. Heckman, B.A. Luther, F. Nunes, J. Seitz, A. Stolz, M. Thoennessen and E. Tryggestad: *First two energy levels in ^{15}F* , Phys. Rev. C 68, 034607 (2003)
- [12] C. Bloch, Nucl. Phys. 4, 503 (1957)
- [13] H.A. Bethe and M.E. Rose, Phys. Rev. 51, 283 (1937)
- [14] A.B. Volkov, Nucl. Phys. 74, 33 (1965)
- [15] D.R. Thompson, M. LeMere and Y.C. Tang, Nucl. Phys. A286, 53 (1977)
- [16] K. Wildermuth and Y.C. Tang: *A Unified Theory of the Nucleus*, Vieweg, Braunschweig (1977)